Aalto-yliopisto

MS-A0007, Syksy 2014
Välikoe 1, 18.11.2014 klo 17-19

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Räknare och tabellsamlingar är inte tillåtna.

Tehtävä 1: a) Laske vektorien $\mathbf{u} = \mathrm{i} + 2\mathrm{j} - 2\mathrm{k}$ ja $\mathbf{v} = \mathrm{i} + \mathrm{j}$ skalaaritulo. Kuinka suuri on vektorien u ja v välinen kulma? *(2p.)*

b) Sievennä kompleksiluku

$$\frac{3 - \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$$

muotoon $x + yi$, missä x ja y ovat reaalilukuja. *(2p.)*

c) Esitä kompleksiluku $(1 + \mathrm{i})^{10}$ napakoordinaateissa siten, että napakulma on välillä $]-\pi, \pi]$. *(2p.)*

a) Beräkna skalärprodukten av vektorerna $\mathbf{u} = \mathrm{i} + 2\mathrm{j} - 2\mathrm{k}$ *och* $\mathbf{v} = \mathrm{i} + \mathrm{j}$. *Hur stor är vinkeln mellan* u *och* v*?* (2p.)

b) Förenkla det komplexa talet

$$\frac{3 - \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$$

på formen $x + yi$, *där* x *och* y *är reella tal.* (2p.)

c) Ge det komplexa talet $(1 + \mathrm{i})^{10}$ *i polär form så att polära vinkeln är i intervallet* $]-\pi, \pi]$. (2p.)

Mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja / *Eventuellt nyttiga formler*:

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0	0	1	0
$\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$5\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	$-$

Tehtävä 2: a) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiolla. Mitä saamasi vastaus kertoo yhtälöiden määrittämien tasojen sijainnista avaruudessa? *(3p.)*

b) Ratkaise yhtäryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$$

Voidaanko vektori $[1, 2, -1]^T$ antaa vektorien $[1, 1, 3]^T$, $[1, 2, 5]^T$ ja $[1, 4, 9]^T$ lineaarikombinaationa? Perustele vastauksesi. *(3p.)*

a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases}$$

med hjälp av Gausselimination. Vad berättar ditt svar om de av ekvationerna bestämda planens läge i rummet? (3p.)

b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$$

Kan vektorn $[1, 2, -1]^T$ *ges som en linjärkombination av vektorerna* $[1, 1, 3]^T$, $[1, 2, 5]^T$ *och* $[1, 4, 9]^T$*? Motivera ditt svar.* (3p.)

Käännä. *Vänd.*

Tehtävä 3: Matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

esittävät lineaarikuvauksia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Matriisi A esittää siis kuvausta F, B esittää kuvausta G ja C esittää kuvausta H.

a) Mikä matriisi esittää lineaarikuvaustá $F \circ G \circ H$, jossa annettuun vektoriin suoritetaan ensin kuvaus H, sitten kuvaus G ja lopuksi vielä kuvaus F? *(2p.)*

b) Laske a)-kohdassa saamasi matriisin käänteismatriisi. Voit halutessasi käyttää hyväksi tietoa

$$C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4p.)

Matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

representerar de linjära avbildningarna $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Matrisen A representerar alltså avbildningen F, B representerar avbildningen G och C representerar avbildningen H.

a) Vilken matris representerar den linjära avbildningen $F \circ G \circ H$, som utför avbildningen H, därefter avbildningen G och slutligen avbildningen F på en given vektor? *(2p.)*

b) Beräkna inverse matrisen till matrisen du fick i a)-delen. Du kan vid behov utnyttja att

$$C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4p.)