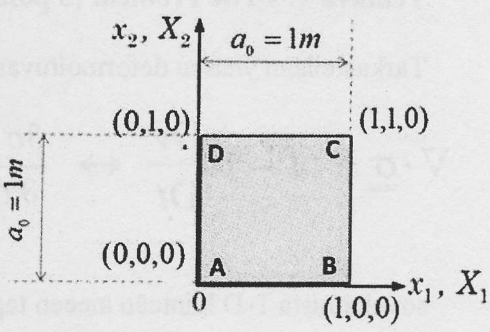
TENTTI 8.12.2014

KJR-C2002 Kontinuumimekaniikan perusteet (5 op)

Yksikkö-kuution leikkaus ABCD:



Tehtävä 1: kappaleen liikkeen kuvaus ja deformaatiot (5 points)

Kappaleen (kuvan yksikkökuution) liike on määritelty kuvauksella:

$$\vec{x} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1(1+X_2), \\ x_2 = X_2(1+3X_1), \\ x_3 = X_3 + 1. \end{cases}$$

Ajatellaan, että lausekkeissa olevat vakiot ovat dimensionaalisia, jotta itse lauseke olisi dimensionaalisesti homogeeninen. Karteesinen koordinaatisto on yhteinen referenssi- ja deformoituneessa tilassa. Koordinaatiston origo on kuution pisteessä A. Kuvassa näkyy vain leikkaus ABCD.

1) Määritä kappaleen mielivaltaisen pisteen siirtymävektori $\vec{u}(\vec{X})$

2) Tarkastele kappaleesta kuvan mukaista referenssi-konfiguraatiossa olevaa aine-leikkausta ABCD tasossa $X_1 - X_2$. Määritä mihin tuo materiaalinen yksikkö-neliön ABCD solmupisteet siirtyvät? Määritä miten aine-leikkaus ABCD kuvautuu liikkeessään? Piirrä deformoitunut leikkaus. (**vinkki**: voit myös hyödyntää määrittämääsi siirtymävektoria)

3) Määritä Green-Lagrangen deformaatiotensorin (-matriisin) kaikki komponentit E_{ij} pisteessä $\vec{X} = (1,1,0)$

Tehtävä 2: - Ainederivaatat – Lagrangen ja Eulerin lähistymistavat (5 points)

Tarkastellaan 1D-sauvaa, jonka alkupituus on kaksi pituusyksikköä. Sauvan materiaalipisteiden liikettä kuvaa transformaatio (liikkeen kuvaus): $x = (1+t)X$

Sauvan lämpeneminen seuraa yhtälöä: $\theta(X,t) = Xt^2$,jossa θon lämpötila ja *t* on aika. (Ajatellaan, että lausekkeissa olevat vakiot ovat dimensionaalisia, jotta kaikki olisivat dimensionaalisesti homogeenisia).

1) Esitä lämpötila spatiaalikoordinaateilla (Eulerin esitys)

2) Määritä lämpötilan materiaalinen aikaderivaatta (Lagrangelainen aikaderivaatta)

3) Määritä Eulerin (spatiaalisen) esityksen mukaisen lämpötilan aine- aikaderivaatta

---

Tehtävä 3: - Säilymislait – Conservation Equations (5 points)

1) Esitä (ei johda) matemaattisesti säilymislait (4 kpl) globaalisessa ja lokaalisessa muodossa **[3 pnts].**

2) Lähtien massan säilymislaista globaalisessa esityksessä, eli, suljetun systeemin massa säilyy, niin johda *a.o.* jatkuvuusyhtälön lokaalinen muoto **[2 points].**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \ t > 0$$

Matemaattisia apuneuvoja:

$$\boxed{\int_\Omega \nabla \cdot \phi \, \mathrm{d}v = \oint_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \phi \, \mathrm{d}s}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_\Omega \phi(\vec{x},t) \mathrm{d}v = \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathrm{d}v + \int_{\partial\Omega} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}s = 0}$$

READ-ME: Extra-tehtävät (4 kpl). Nämä alla olevat tehtävät eivät ole pakollisia, mutta niistä saa lisäpisteitä tentin kokonaispisteiden päälle jos vastaa oikein. Ei sakoteta siitä, jos vastaa väärin tai jättää tehtävää tekemättä.

Extra-tehtävät : - Säilymislait ja Cauchy'n jännitys (yhteensä **4 extra-points**)

1. Selosta sanallisesti, täsmällisesti ja ytimekkäästi klassisen jatkuvan aineen mekaniikan neljä säilymislakia globaalisessa formulaatiossa. [**2 extra-points**]

2. Cauchy'n jännitysteoreema: a) Ilmaise matemaattisesti, millä tavalla jännitys, ulkonormaali ja traktio (jännitysvektori), jossain leikkauksen pisteessä, liittyvät toisiinsa. [**1 extra-point**]

   b) Jos tunnetaan traktio jossain leikkauksen pisteessä, niin ilmaise matemaattisesti miten siitä saadaan normaali- ja leikkauskomponentit. [**1 extra-point**]

KÄÄNNÄ PAPERI→ JATKUU

Tenttitehtäviä on 4kpl + 2 vapaaehtoista ekstra-tehtävää, josta tulee pisteitä tenttipisteiden päälle

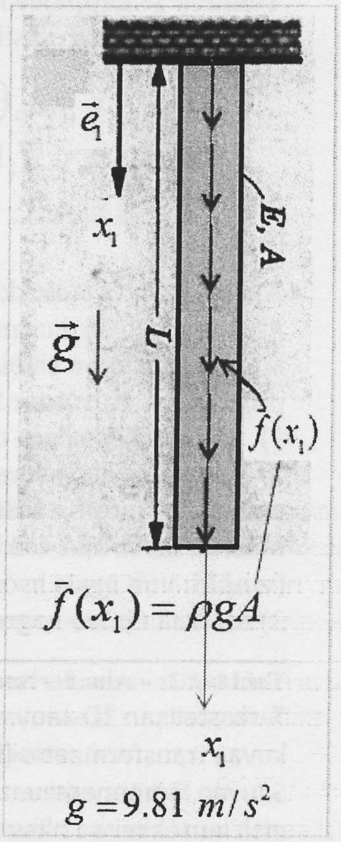
TENTTI 8.12.2014

Tehtävä 4: - The Problem [5 points]: kinematiikka-säilymislaki-materiaalimalli (5 points)

Tarkastellaan yleisen deformoituvan 3D kontinuumin Cauchy'n liikeyhtälön (1)

$$\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}+\rho\vec{\mathrm{f}}=\rho\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\quad\leftrightarrow\quad\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\rho f_i=\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\quad(1)$$

soveltamista 1-D kiinteän aineen tapaukseen.



Olkoon kuvan mukainen 1-D elastinen L-pituinen sauva, joka roikkuu katosta. Sauvan massa on M [kg]. Sauvan yläpää kohdassa $x = 0$, on kiinni (siirtymät = 0) ja sen alapää $x = L$ on vapaa. Sauvan poikkileikkaus on vakio, ympyränmuotoinen ja sen läpimitta $D << L$. Poikkileikkauksen pinta-ala on A (m^2). Ainoana kuormituksena on sauvan omapaino, jonka resultantti pituusyksikköä kohti on $\bar{f}(x)$ [N/m] vaikuttaa sauvan symmetria akselilla (*kts.* kuva). Siirtymäkenttä voidaan tällöin hyvin approksimoida 1-D siirtymänä, seuraavasti

$$\vec{u}(\underline{x},t)=u(x_1,t)\vec{e}_1$$

Tarkastellaan sauvan aksiaalisia siirtymiä alaspäin tasapainotilassa. Oletetaan vielä, että siirtymät ja venymät ovat pieniä.

Sauvan materiaali on homogeenista, lineaarisesti kimmoista ja noudattaa Hooken lakia (kimmokerroin on E [Pa]).

1) Määritä sauvan tiheys ρ ja tilavuusvoimat $\rho\vec{g}$ [N/m^3] sauvan massan M ja tilavuuden avulla.

2) Sauvassa vallitsee 1-D jännitys- ja venymätila. Määritä venymä- ja jännitysmatriisit?

3) Johda tasapainoyhtälö 1-D tapauksessa lähtien yhtälöstä (1).

4) Ota huomioon Hooken lakia, ja kirjoita saamasi tasapainoyhtälö pelkästään siirtymän avulla.

5) Mitkä ovat sammasi reuna-arvotehtävän reuna-ehdot? Ratkaise siirtymä reuna-arvotehtävästä, eli $u(x_1) = ?$

6) Määritä $u(x_1 = L)$ ja $\sigma_{11}(x_1 = 0)$.

$\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}$:n karteesiset komponetit:

Matemaattisia apuneuvoja:

$$\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}\\[2mm]\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}\\[2mm]\dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

Tenttitehtäviä on 4kpl + 2 vapaaehtoista ekstra-tehtävää, josta tulee pisteitä tenttipisteiden päälle