Aalto-yliopisto

MS-A0106 / Syksy 2014

Välikoe 2, to 11.12.14 klo 16:30–19:30

Tehtävä 1: Totta vai tarua? (Oikea vastaus 1p, perustelu 1p.)

a) Jos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Jos $b_n \geq a_n \geq 0$ kaikilla n ja jos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenee.

c) Jos $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ja jos $|s_n| \leq 100$ kaikilla n, niin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee.

Tehtävä 2: (3p / kohta)

a) Suppeneeko $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$?

b) Määritä antiderivaatta $\displaystyle\int \frac{5x^2+18x-1}{(x+4)^2(x-3)}\,dx$.

Vihjeitä: a) integaalitesti ja sijoitusmenetelmä, b) osamurto muotoa $A/(x+4) + B/(x+4)^2 + C/(x-3)$.

Tehtävä 3: Ratkaise alkuarvotehtävä (6p)

$$\begin{cases} 3xy'(x) - y(x) = \ln(x) + 1, & (x > 0) \\ y(1) = -2. \end{cases}$$

Vihjeitä: yhtälön $y' + p(x)y = q(x)$ yleinen ratkaisu on $y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\,dx$, missä $P(x) = \int p(x)\,dx$. Tai: homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu + epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu.

Tehtävä 4: Suppeneeko (3p / kohta)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$?