Aalto-yliopisto

MS-A0004/A0006, Syksy 2014
Välikoe 2, 23.10.2014 klo 9-12

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: a) Oletetaan, että $n \times n$-matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_j \neq \lambda_k$ kaikilla $j \neq k$, ja kutakin ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit ovat myös samat. Miksi nyt välttämättä pätee $A = B$? *(2 p.)*

b) Oletetaan, että $n \times n$-matriisit A ja C ovat similaariset, eli $A = R^{-1}CR$ (ja $C = RAR^{-1}$) jollakin kääntyvällä matriisilla R. Osoita, että $R^{-1}\mathrm{v}$ on matriisin A ominaisvektori, mikäli $C\mathrm{v} = \lambda\mathrm{v}$ jollain $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $0 \neq \mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$. Päättele, että matriiseilla A ja C on samat ominaisarvot. *(2 p.)*

c) Oletetaan, että $n \times n$-matriisilla A on erisuuret ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, jolloin A voidaan diagonalisoida. Osoita, että $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$. *(2 p.)*

Tehtävä 2: Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Diagonalisoi A. *(2 p.)*

b) Laske A^{2014}. *(2 p.)*

c) Laske $(A^{-1})^{999}$. *(2 p.)*

Vastauksiin saa jäädä eksponenttimuotoisia lausekkeita (esim. 9^{2014}).

Tehtävä 3: Matriisilla A on singulaariarvohajotelma

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ 14 & 19 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

a) Aseta hajotelmaan oikeille paikoilleen A:n singulaariarvot 15, 3 ja 30. Laske hajotelman avulla matriisille A "rangia 2" oleva approksimaatio, jossa jätät merkityksettömimmän singulaariarvon huomiotta. *(3 p.)*

b) Kerro, mistä osista neliömatriisin singulaariarvohajotelma koostuu ja miten se voidaan laskea. *(3 p.)*