MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto)
Turunen / Saari

Välikoe 2 (21.10.2014 klo 16:30–19:30)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.
Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Olkoon "riittävän mukava" jaksollinen signaali $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ määritelty kaavalla
$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t \cdot k},$$
missä luvut $c_k \in \mathbb{C}$. Laske huolellisesti Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Mikä on signaalin $s(t)$ esitys Fourier-sarjana silloin?

2. Tarkastellaan nyt jaksollisia digitaalisia signaaleja $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   a) Miten määritellään diskreetti Fourier-muunnos $\widehat{s}$ ja vastaava käänteis-Fourier-muunnos tässä tapauksessa?

   b) Laske $\widehat{r}$, missä $r = \widehat{s}$ ja $s(t) = t$, kun $t \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Gabor-muunnos* $Gs : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on erikoistapaus ikkunoidusta Fourier-muunnoksesta. Se määritellään kaavalla
$$Gs(t, \nu) := \int_{\mathbb{R}} s(u) \, \mathrm{e}^{-\pi(u-t)^2} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u \cdot \nu} \, \mathrm{d}u.$$
Laske Gabor-muunnos, kun

   a) $s(u) = \delta_p(u)$ eli Dirac-delta hetkellä $p \in \mathbb{R}$,

   b) $s(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi u \cdot \alpha}$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (Vihje: Saat käyttää tässä tietoa $\widehat{r} = r$, jos $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.)