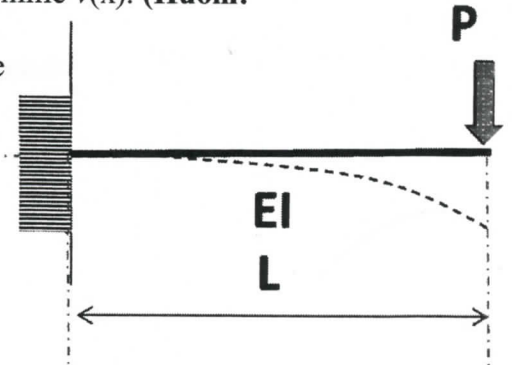


1. **Kokonaispotentiaalienergian minimin periaate (Rayleigh-Ritz):**
Tarkastellaan tasossa oleva kimmoinen ulokepalkki.

a) Valitse kinemaattisesti luvallinen approksimaatio siirtymille $v(x)$. (**Huom! tarkka ratkaisu ei kelpaa yritteeksi tässä tehtävän a-kohdassa**). Leikkausmuodonmuutosten osuutta ei tarvitse huomioida. [1p]

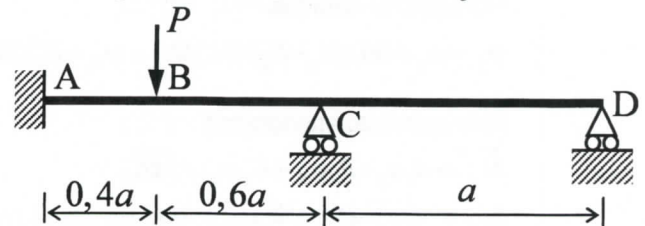
b) Määritä palkin kiertymän ja taivutusmomentin likimääräiset lausekkeet kokonaispotentiaalienergian minimin periaatteella käyttämällä valitsemaasi siirtymän approksimaatiota. [3p]

c) Laske ulokkeen päässä tarkat kiertymän arvo sekä taivutusmomentin jakauma palkissa ja vertaile näitä likimääräiseen samaasi ratkaisuun. Päätelmiä? [1p]



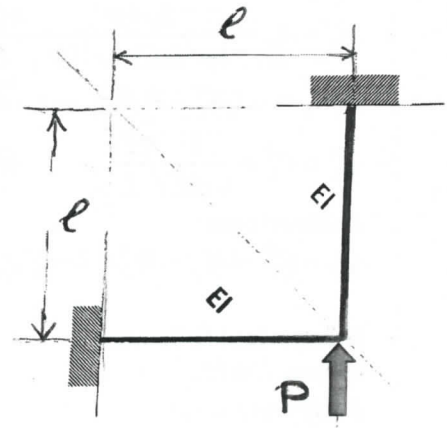
2. Määritä oheisen tasajäykän kimmoisen jatkuvan palkin taivutusmomentti- ja leikkausvoimakuviot [4p].

Määritä myös maksimimomentin arvo ja sijainti sekä tukireaktiot [1p].



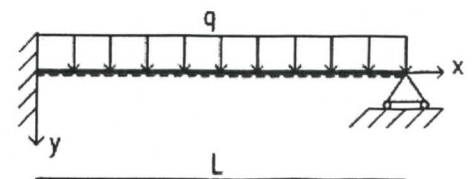
3. Määritä oheisen lineaarisesti elastisen kehän kuorman P_{kr} arvo nurjahduksen suhteen (menetelmä on vapaa). Kehän nurkka on suorakulma. Tuet ovat momenttijäykkiä.

Tulokseksi riittää johtaa ekspliiittisen ehdon tai yhtälön, josta pystyy määrittämään yksikäsitteisesti P_{cr} [4p].
Hahmota nurjahdusmuoto. [1p]



4. a) Määritä oheisen taso palkin plastinen rajakuorma käyttäen kinemaattista lausetta [3p]. Materiaali on elastinen ideaaliplastista. Poikkileikkauksen täysplastinen momentti M_p on vakio. Mikä on murtomekanismi (määritä plastisten nivelten tarkat paikat)? [1p].

b) Tarkista, ettei myötöehtoa rikota missään konstruomalla tasapainoehdot toteuttava taivutusmomenttijakauma [1p].



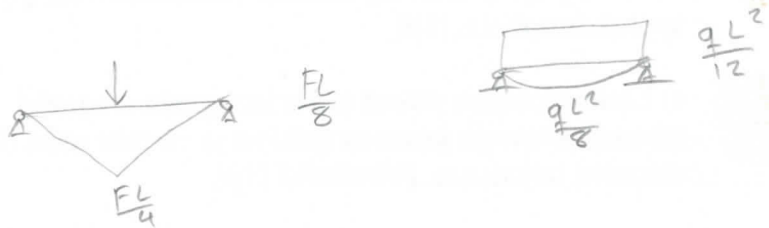
Kulmanmuutosmenetelmä :

$$M_{ij} = a_{ij}\varphi_{ij} + b_{ij}\varphi_{ji} - c_{ij}\psi_{ij} + MK_{ij}$$

$$M_{ij} = a_{ij}^0\varphi_{ij} - c_{ij}^0\psi_{ij} + MK_{ij}^0, \text{ sauvan päässä } j \text{ on nivel}$$

Sauvavakiot ($EI = \text{vakio}$) :

$$a_{ij} = \frac{4EI}{L}, b_{ij} = a_{ij}/2 = \frac{2EI}{L}, c_{ij} = \frac{6EI}{L}, a_{ij}^0 = b_{ij}^0 = \frac{3EI}{L}$$



Puristettu ja taivutettu sauva:

Momenttimenetelmä

$$\varphi_{ij} = \alpha_{ij}\psi(kL)M_{ij} - \beta_{ij}\phi(kL)M_{ji} + \psi_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}^0(kL), k^2 \equiv P/EI$$

Kulmanmuutosmenetelmä

$$M_{ij} = A_{ij}\varphi_{ij} + B_{ij}\varphi_{ji} - C_{ij}\psi_{ij} + \overline{MK}_{ij}$$

$$M_{ij} = A_{ij}^0\varphi_{ij} - C_{ij}^0\psi_{ij} + \overline{MK}_{ij}^0 \text{ (sauvan päässä } j \text{ on nivel)}$$

Tasajäykkä sauva :

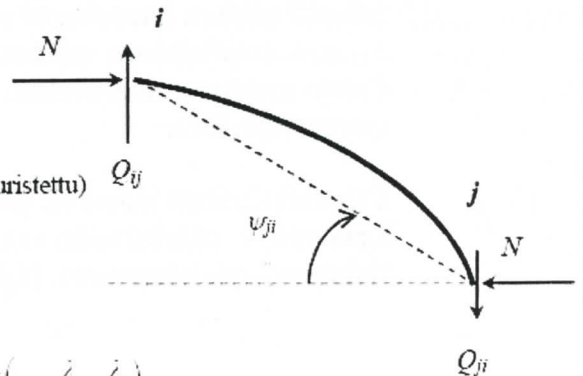
$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{2\psi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)} \frac{6EI}{L}, B_{ij} = B_{ji} = \frac{\phi(kL)}{4\psi^2(kL) - \phi^2(kL)} \frac{6EI}{L} \text{ ja } C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

$$\overline{MK}_{ij} = -A_{ij}\bar{\alpha}_{ij}^0 - B_{ji}\bar{\alpha}_{ji}^0, \quad \overline{MK}_{ji} = -A_{ji}\bar{\alpha}_{ji}^0 - B_{ij}\bar{\alpha}_{ij}^0,$$

$$A_{ij}^0 = C_{ij}^0 = \frac{1}{\psi(kL)} \frac{3EI}{L}, \quad \overline{MK}_{ij}^0 = -A_{ij}\bar{\alpha}_{ij}^0$$

Leikkausvoima:

$$Q_{ij} = Q_{ij}^0 - (M_{ij} + M_{ji})/L - N\psi_{ij} \text{ (} N \text{ positiivinen, kun sauva puristettu)}$$



Berryn funktiot:

Olkoon $\lambda \equiv kL$.

Puristettu sauva:

$$\phi(\lambda) = \frac{6}{\lambda} \left(\frac{1}{\sin \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right), \quad \psi(\lambda) = \frac{3}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\tan \lambda} \right), \quad \text{ja } \chi(\lambda) = \frac{24}{\lambda^3} \left(\tan \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \right).$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{a} \varphi_2 - \frac{48}{250} Fa$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{a} \varphi_2$$

$$\varphi_2 = \frac{48}{1750EI} Fa^2$$