Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, Perustieteiden korkeakoulu
MS-C.1350 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Kinnunen/Korvenpää

Loppukoe 23.10.2014 kello 13:00-16:00

Tämä tehtäväsarja on vain syksyn 2014 kurssin osallistujille. Tämä loppukoe vaikuttaa 50 prosenttia kurssin arvosteluun, toinen 50 prosenttia tulee laskuharjoituksista. Jos haluat suorittaa koko kurssin loppukokeella, niin pyydä erillinen tehtäväpaperi valvojalta.

1. (a) Miten määritellään funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ Fourierin sarja?

   (b) Laske funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

   Fourierin kertoimet $\widehat{f}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

2. Selosta lyhyesti, miten tason yksikkökiekon Dirichletin ongelma

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{kun} \quad x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1, \\ u(x) = f(x), & \text{kun} \quad x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = 1, \end{cases}$$

   ratkaistaan muuttujien separointimenetelmällä. Pelkkien päävaiheiden kuvailu riittää.

3. (a) Miten määritellään Fourierin muunnos ja Fourierin käänteismuunnos? Kirjoita myös tarvittavat oletukset näkyviin.

   (b) Oletetaan, että $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $y \in \mathbb{R}^n$ kiinteä. Määritellään funktio g asettamalla $g(x) = f(x+y)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Näytä, että $\widehat{g}(\xi) = e^{iy\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko ja $T > 0$. Merkitään

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T) \quad \text{ja} \quad \Gamma_T = (\Omega \times \{t=0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]).$$

   Oletetaan, että $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ on ongelman

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \text{joukossa} \quad \Omega_T, \\ u = g, & \text{joukossa} \quad \Gamma_T, \end{cases}$$

   ratkaisu, missä $g \in C(\Gamma_T)$.

   (a) Muotoile maksimiperiaate ratkaisulle u joukossa Ω_T. Pelkkä täsmällinen muotoilu riittää, maksimiperiaatetta ei tarvitse todistaa.

(b) Olkoon $f \in C(\Omega_T)$. Todista maksimiperiaatteen avulla, että ongelmalla

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \text{joukossa } \Omega_T, \\ u = g, & \text{joukossa } \Gamma_T, \end{cases}$$

on korkeintaan yksi ratkaisu $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$.

5. Alla on kuusi kurssilla esiintynyttä funktiota. Lausekkeissa olevien funktioiden oletetaan olevan riittävän sileitä ja riittävän hyvin integroituvia. Minkä ongelman ratkaisuja ne ovat? Anna myös mahdolliset alku- ja reuna-arvot sekä lähdetermit. Pelkkä ongelman täsmällinen muotoilu riittää.

(a) $u(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$, $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) $u(x) = \dfrac{x_3}{2\pi} \displaystyle\int_{\partial \mathbb{R}^3_+} \frac{g(y)}{|x-y|^3}\, dy$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$.

(c) $u(x,t) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

(d) $u(x,t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dy\, ds$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

(e) $u(x,t) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dy\, ds$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

(f) $u(x,t) = \dfrac{1}{4\pi t^2} \displaystyle\int_{\partial B(x,t)} \big(h(y)t + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x)\big)\, dS(y)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.