Aalto University
School of Science

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka
Tentti 16.12.2014

1. Vastaa lyhyesti, mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (1 p./kohta)
   a) Mitä tarkoitetaan degeneraatiolla
   b) Mitä kvanttimekaniikassa tarkoitetaan systeemin perustilalla?
   c) Osoita ei-degeneroidussa tapauksessa, että jos kaksi hermiittistä operaattoria $\hat{A}$ ja $\hat{H}$ kommutoivat keskenään, niin niillä on yhteiset (ei-triviaalit) ominaisfunktiot.
   d) Mitä on tunneloituminen?
   e) Jos meillä on operaattori $\hat{O}$ ja tilat ϕ, f, ja ψ, onko $\langle f|\hat{O}^2|\phi\rangle|\psi\rangle$ ket-vektori, bra-vektori vai skalaari (eli luku)? Perustelut.
   f) Mitä tarkoitetaan kahden kvanttimekaanisen tilan ortogonaalisuudella?

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \leq x \leq L$, muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ ortonormeeratut ominaisfunktiot ja -arvot ovat

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2, \quad n = 1, 2, ... \tag{1}$$

   a) Oletetaan, että hiukkasen tilafunktio ajanhetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(x, 0) = C\left[\phi_2(x) - \phi_3(x)/2\right]. \tag{2}$$

   Määritä kerroin C ja ratkaise hiukkasen tila $\Psi(x, t)$ ajanhetkellä t. (2 p.)
   b) Mikä on hiukkasen liikemäärän odotusarvo $\langle\hat{p}(t)\rangle$ ajanhetkellä t? (2 p.)
   c) Laske energian odotusarvo $\langle\hat{H}\rangle$. Onko se liikevakio? Perustelut. (2 p.)
   Apuna:
   - $\int_0^1 dy \sin[2\pi y]\cos[3\pi y] = -4/5\pi$
   - $\int_0^1 dy \cos[2\pi y]\sin[3\pi y] = 6/5\pi$
   - $\int_0^1 dy \cos[n\pi y]\sin[n\pi y] = 0$

KÄÄNNÄ SIVUA

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa potentiaali on siis $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right), \tag{3}$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

a) Osoita, että Hamiltonin operaattori on $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$. (1 p.)

b) Laske $\langle x\rangle$ ja $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ tilalle $|\psi(t=0)\rangle = 1/\sqrt{3}|0\rangle + \sqrt{2/3}|2\rangle$, missä $|n\rangle$ on harmonisen oskillaattorin energian ominaistila. (3 p.)

c) Mikä on harmonisen oskillaattorin perustilan aaltofunktio $\phi_0(x)$? Perustelut. (2p.)

Apuna:

- $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

4. a) Johda operaattorin $\hat{A}$ odotusarvon aikakehitykselle lauseke

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle, \tag{4}$$

missä $\hat{H}$ on Hamiltonin operaattori. (3 p.)

b) Johda liikeyhtälö paikan odotusarvolle harmonisessa oskillaattorissa. (Voit tarvittaessa olettaa a-kohdan tuloksen tunnetuksi.) (3 p.)

5. a) Mitkä seuraavista voivat olla kaksitilasysteemin tiheysmatriiseja. Perustelut. (4 p.)

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \quad \hat{\rho}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & e^{i\pi/4}/\sqrt{3} \\ e^{-i\pi/4}/\sqrt{3} & 2/3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\hat{\rho}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \hat{\rho}_4 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

b) Ovatko edellisen kohdan tiheysmatriisit puhtaita tiloja vai sekatiloja? Perustelut. (2 p.)

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.