

Tentti (12.11.2013 klo 16–20)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteuttaa jokaisen tehtävän asteikolla 0..6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, missä

$$s(t) := \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [-1/2, +1/2], \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Aikasymmetrian nojalla \widehat{s} on tässä tehtävässä reaaliarvoinen, joten sievennä vastauksesi selkeästi reaalisiksi!

2. Määritellään signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ muunnos $As : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$As(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t, u) s(u) du,$$

missä $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on ns. ydin operaattorille A (emme tässä tarkastele ehtoja, jolla kyseinen integraali on ok). Sanotaan, että A on "aika-invariantti", jos $As(t - t_0) = As_{t_0}(t)$, missä $s_{t_0}(t) = s(t - t_0)$. Näytä, että silloin

$$K(t, u) = r(t - u)$$

jollekin $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (toisin sanoen silloin $As = r * s$).

3. Laske digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetin ajan Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, kun

$$s(t) = 2^{-|t|}.$$

(Symmetrian vuoksi muunnos on tässä reaaliarvoinen, joten sievennä vastauksesi reaalisiksi!)

4. Laske signaalin $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos, kun $s(t) = i^t$.
5. Signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Wigner-aikataajuusjakauma $Ws : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään

$$Ws(t, \nu) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \nu} s(t + u/2) \overline{s(t - u/2)} du.$$

Laske Ws , kun $s(t) = e^{-\pi t^2}$.

(Voit käyttää laskussa tietoa $\widehat{\widehat{s}}(\nu) = s(\nu)$, kun $s(t) = e^{-\pi t^2}$.)