

Vastaa tehtävään 4 ja valintasi mukaan joko tehtävään 5 tai 6. Jokainen tehtävä on kymmenen pisteen arvoinen. (Jos vastaat sekä tehtävään 5 että 6, tehtävä 5 arvioidaan.)

Palauta vähintään yksi nimelläsi varustettu konsepti. Palauta *kaikki* saamasi yliopiston konseptiarkit – myös tyhjät ja suttupaperit. Tehtäväpaperin saat pitää.

Sallittu oheismateriaali: taskulaskin (myös ohjelmoitavat ja graafiset laskimet käyvät).

4. Jos kirjoitat vastauksen kaavana, selitä kaavaa.

- (a) Selitä lyhyesti Brewsterin kulma. Miten kulma liittyy tasoallon polarisaatioon kahden epämagneettisen eristeaineen rajapinnassa? (4 p.)
- (b) Mitä tarkoittaa aaltomuodon katkootaajuus? (3 p.)
- (c) Mitä ilmaisee antennin suuntaavuus? (3 p.)

5. Auringonvaloa (polarisoitumaton tasoaalto) tulee ilmasta vedenpintaan 80 asteen tulokulmassa. Kuinka suuri osa tulevan aallon tehosta siirtyy veteen? Veden suhteellinen permittiivisyys on 1.77.

- 6. (a) Suorakulmaisen ilmatäytteisen aaltoputken mitat ovat $22.86 \text{ mm} \times 10.16 \text{ mm}$, ja toimintataajuus $f = 10.0 \text{ GHz}$. Määritä kahden alimman aaltomuodon etenemiskertoimet β . (5 p.)
- (b) Erään antennin kentän säteilykuvio pallokoordinaatistossa on

$$F(\theta, \varphi) = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ ja } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Määritä antennin (maksimi)vahvistus, kun antennin säteilyhyötysuhde on 80 %. (5 p.)

Mahdollisen tarpeen varalta:

Heijastus- ja läpäisykertoimilla on yhteydet

$$1 + R_{\text{KP}} = T_{\text{KP}} \quad \text{ja} \quad \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} (1 + R_{\text{YP}}) = T_{\text{YP}}.$$

Heijastuskertoimet saa lausekkeesta

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \text{missä} \quad \eta_i = \eta_i / \cos \theta_i \text{ (KP)} \quad \text{tai} \quad \eta_i = \eta_i \cos \theta_i \text{ (YP)} \quad (i = 1, 2).$$

Nablaoperaatiot

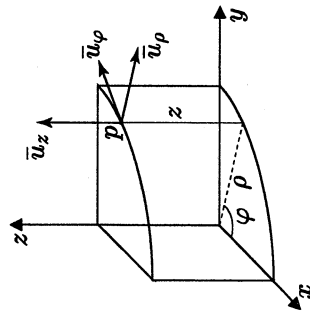
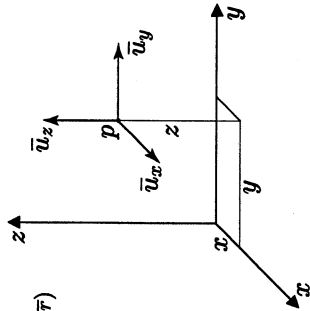
Karteesinen koordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \bar{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\vec{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



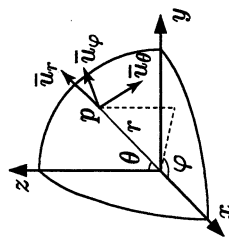
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \bar{u}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} f + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{u}_\rho & \rho \bar{u}_\phi & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\phi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} f_\phi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \bar{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \bar{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r \bar{u}_\theta & r \sin \theta \bar{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} f_\phi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Koordinaattimuunnokset vektorille \vec{f}

Karteesinen \leftrightarrow sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_x dx + \bar{u}_y dy + \bar{u}_z dz$$

$$d\vec{S}_x = \bar{u}_x dy dz$$

$$d\vec{S}_y = \bar{u}_y dx dz$$

$$d\vec{S}_z = \bar{u}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

Sylinterikoordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_\rho d\rho + \bar{u}_\varphi \rho d\varphi + \bar{u}_z dz$$

$$d\vec{S}_\rho = \bar{u}_\rho \rho d\varphi dz$$

$$d\vec{S}_\varphi = \bar{u}_\varphi \rho d\rho dz$$

$$d\vec{S}_z = \bar{u}_z \rho d\rho d\varphi$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Pallokoordinaatisto

$$d\vec{l} = \bar{u}_r dr + \bar{u}_\theta r d\theta + \bar{u}_\phi r \sin \theta d\varphi$$

$$d\vec{S}_r = \bar{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$d\vec{S}_\theta = \bar{u}_\theta r \sin \theta dr d\varphi$$

$$d\vec{S}_\varphi = \bar{u}_\varphi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\text{Gaussin lause} \quad \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Stokesin lause} \quad \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Vakioita

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{C}$$