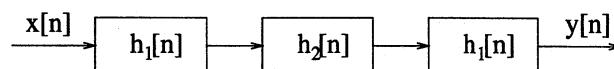


- Laskinta jonka muisti on tyhjennetty saa käyttää tentissä.
- Ei muuta materiaalia kuin tentissä jaettava kaavakokoelma "Table of formulas".

1. (6 pistettä) Ovatko seuraavat väittämät oikein vai väärin? Oikea vastaus: +1p, ei vastausta: 0p, väärä vastaus: -1p. Voit vastata niin moneen kysymykseen kuin tahdot eikä valintaa tarvitse perustella. Maksimipistemäärä on kuusi (6) ja minimi nolla (0) pistettä.
 - (a) Systeemi $y[n] = nx[n]$ on lineaarinen ja aika-invariantti (LTI).
 - (b) Sekvenssien $x[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$ ja $y[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$ lineaarisen konvoluution $x[n] * y[n]$ ensimmäinen nollasta poikkeava elementti on ajanhettikessä $n = 0$.
 - (c) Impulssivasteen $h[n] = (\frac{1}{3})^n \mu[n+1]$ omaava LTI järjestelmä on kausalinen ja BIBO (bounded-input bounded-output) stabiili.
 - (d) Diskreetti-aikainen sekvenssi $x[n] = \cos(\frac{n^2\pi}{8})$ on periodinen ja perusjakson (fundamental period) pituuus on $N_f = 8$.
 - (e) Minkä tahansa sekvenssin $x[n]$ diskreetti-aikainen Fourier muunnos (DTFT) $X(e^{j\omega})$ saadaan aina sen z-muunnoksesta $X(z)$, mikäli jälkimmäinen on olemassa, sijoittamalla $z = e^{j\omega}$ siihen.
 - (f) Butterworth-suodattimen jonka rajataajuus (cut-off frequency) on F_c bilineari-muunnos antaa IIR suodattimen jonka normalisoitu rajataajuus on $f_c = F_c/F_T$ kun F_T on signaalin näytteistystajaajuus.
 - (g) Kausalinen IIR suodatin jonka siirtofunktio (transfer function) on muotoa $H(z) = \frac{1}{1-1.85z^{-1}+0.85z^{-2}}$ on BIBO stabiili.
 - (h) Nopeaa Fourier muunnosta (FFT) voidaan käyttää vähentämään N -pisteen lineaarisen konvoluution laskennallinen kompleksisuus $O(N^2) \rightarrow O(N \log_2 N)$ kompleksiseen operaatioon.
 - (i) Hamming-ikkunaa käytetään lievittämään Gibbsin ilmiötä jota esiintyy FIR (finite impulse response) suodattimissa jotka on suunniteltu leikkaamalla (truncation) ideaalista alipäästösuodatintta.
2. (6 pistettä) Tunnetun LTI-järjestelmän h_1 impulssivaste on $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$. Se on kytketty sarjaan toisen LTI-järjestelmän h_2 kanssa kuvan 1 mukaisesti.



Kuva 1: Sarjaankytetty järjestelmä.

Laske impulssivaste $h_2[n]$ (dekonvoluutio), kun tiedetään että koko järjestelmän impulssivaste $h[n]$ on kuten taulukossa 1 alapuolella.

Taulukko 1: Sarjaankytetyn koko järjestelmän impulssivaste.

n	< 0	0	1	2	3	4	5	6	7	> 7
$h[n]$	0	0	1	0	0	-2	0	0	1	0

Vihjeitä:

Voi olla hyödyksi muistaa että konvoluutio on sekä kommutatiivinen $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$ että assosiaatiivinen $(x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n])$.

Jos $L\{x[n]\}$ on sekvenssin pituuus ja $A\{x[n]\}$ määritetään ensimmäisen nollasta poikkeavan alkion ajanhetten, niin $L\{x_1[n] * x_2[n]\} = L\{x_1[n]\} + L\{x_2[n]\} - 1$ ja $A\{x_1[n] * x_2[n]\} = A\{x_1[n]\} + A\{x_2[n]\}$.

3. (6 pistettä) Tarkastellaan digitaalista järjestelmää jonka näytteistystaajuus on $F_T = 8000$ Hz. Tehtävä näisi on suunnitella realisoitavissa oleva alipäästö FIR suodatin ikkunoituun Fourierin sarja -menetelmään (windowed Fourier series method) perustuen kun suodattimen tulee täyttää alla esitetty vaatimukset.

- (a) Suunnittele $N = 5$ pituinen kausaalinen FIR alipäästösuođatin jonka 3 dB rajataajuus on $F_c = 3000$ Hz käyttämällä sekä suorakaide (rectangular) että Hamming ikkunoita. Laske suodattimien impulssivasteet (numeerisina arvoina, käytä laskinta) sekä hahmottele ne graafisesti siten että suodattimet ovat kausalisia.
- (b) Olkoon 3 dB rajataajuus $F_c = 3000$ Hz kuten kohdassa (a). Nyt siirtokaistan tulee olla korkeintaan $\Delta F = 500$ Hz ja minimi vaimennus estokaistalla $\alpha_s = 30$ dB. Tehtävänäsi on valita sopiva ikkuna-funktio kausaliselle FIR suodattimelle siten että suodattimen pituus N on pienin mahdollinen mutta vaatimukset täytyvät. Perustele valintasi ja laske minimi pituus jonka suodatin tarvitsee.

Vihjeitä:

Jos digitaalisen järjestelmän näytteistystaajuus on F_T Hz niin taajuus F Hz vastaa normalisoitua kulmataajuutta $\omega = 2\pi \frac{F}{F_T}$.

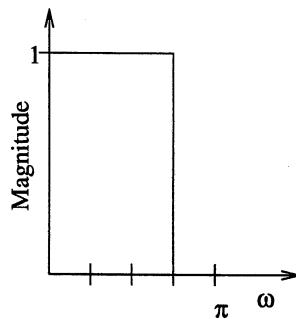
Ikkuna-funktio jonka pituus on $N = 2M + 1$ määritellään aikaindeksin $n = 0$ ympärillä siten että kaikki nollasta poikkeavat kertoimet $w[n]$ ovat välillä $-M \leq n \leq M$. Kertoimet löytyvät kaavakokoelmansta suorakaide, Hamming, Hann, Blackman and Bartlett ikkunoille.

Minimi estokaistavaimennus ja siirtokaistan leveys $\Delta\omega$ normalisoidun kulmataajuuden funktiona eri ikkunoille on annettu taulukossa 2.

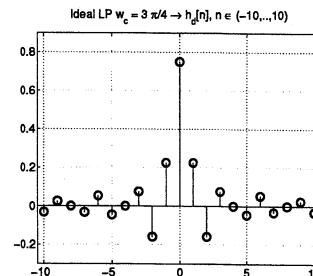
Taulukko 2: Joidenkin ikkunafunktioiden ominaisuuksia

Ikkuna	Minimi estokaistan vaimennus α_s	Siirtokaistan leveys $\Delta\omega$
Suorakaide	20.9 dB	$\frac{0.92\pi}{M}$
Hann	43.9 dB	$\frac{3.11\pi}{M}$
Hamming	54.5 dB	$\frac{3.32\pi}{M}$
Blackman	75.3 dB	$\frac{5.56\pi}{M}$

Ideaalinen alipäästösuođatin jonka rajataajuus (normalisoituna kulmataajuutena) on ω_c on esitetty kaavakokoelmanmassa. Sen amplitudi- ja impulssivasteet on myös esitetty rajataajuudelle $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$ alla olevissa kuvissa 2(a) ja 2(b).



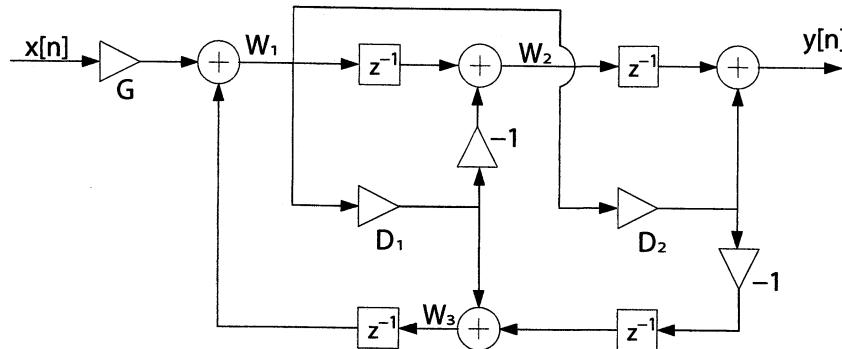
(a) Amplitudivaste.



(b) Impulssivasteen $h[n]$ arvoja.

Kuva 2: Ideaalinen alipäästösuođatin jonka rajataajuus (cutoff frequency) on $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$.

4. (6 pistettä) Tarkastellaan digitaalista suodatinrakennetta joka on esitetty kuvassa 3 alla.



Kuva 3: Digitaalisen järjestelmän lohkokaavio.

- (a) Määritä järjestelmän differenssiyhtälö.
- (b) Onko kyseinen järjestelmä lineaarinen ja aikainvariantti (LTI)?
- (c) Onko rakenne kanoninen (canonic) viive-elementtien suhtein? Miksi?
- (d) Mikä on suodattimen tyyppi (yli-, ali-, kaistanpäästö, kaistanesto tai kaikenpäästävä ts. "allpass")? Perustele vastauksesi matemaattisesti.

Vihjeitä:

Kun lasket järjestelmän differenssiyhtälöt, saattaa olla hyödyllistä selvittää ensin signaalin arvot pisteissä W_1, W_2, W_3 .

Suodattimen tyyppin määrittelemisessä voi auttaa kun laskee ensin järjestelmän neliöidyn siirtofunktion $|H(z)|^2 = H(z)H(z^{-1})$ ja yrittää päättää amplitudivastetta sekä tyyppiä siitä.

5. (6 pistettä) Tarkastellaan suodatinta jonka siirtofunktio on $H(z) = \sum_{k=0}^M h[k]z^{-n}$, missä $h[k]$ ovat reaalilukuja kaikilla $k = 0, 1, \dots, M$ arvoilla.

- (a) Mikä on suodattimen impulssivaste? Onko se FIR vai IIR (infinite impulse response) tyyppiä?
- (b) Mitkä ehdot impulssivasteelle takaavat että suodattimen vaihe on lineaarinen? Esittele vähintään kaksi tapausta joita löytyvät luentokalvoilta tai kirjasta ja hahmottele niille esimerkinomaiset impulssivasteet.
- (c) Oletetaan että nyt $M = 2$ ja $h[0] = h[2]$. Laske taajuusvaste muodossa $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$ missä $|H(e^{j\omega})| \geq 0$ on systeemin magnitudivaste ja $-\pi \leq \theta(\omega) \leq \pi$ vaihevaste. Mikä on tämän suodattimen ryhmäviive (group delay)? Hahmottele magnitudi- ja vaihevasteet normalisoidun kulmatajuuden arvoille $0 \leq \omega \leq \pi$ kun $h[0] = h[1] = h[2] = 1/3$. Minkä tyyppisestä suodattimesta (yli-, ali-, kaistanpäästö, kaistanesto tai kaikenpäästävä ts. "allpass") on kyse? Onko suodatin stabiili ja / tai kausalinen?
- (d) Kirjoita siirtofunktio $H(z)$ edellisen kohdan suodattimelle kun $M = 2$, ja $h[0] = h[2]$. Piirrä suodattimen lohkokaavio käyttäen kahta kertoja, kahta viive-elementtiä sekä tarvittavaa määritää muita komponentteja. Piirrä nolla-napa kaavio kun $h[0] = h[1] = h[2] = 1/3$.

Vihjeitä:

Kaavakokoelman löytyvä "Euler's formula" saattaa olla tässä tehtävässä hyödyksi.

ElEC-C5230 DSP Table of formulas, spring 2014

Disclaimer! Notations, e.g., ω or Ω , may vary from book to book, or from exam paper to other.

DSP context, change between time (1st row) and frequency (2nd row) domain using Fourier / Z-transform.

input	impulse response	output signal
$x[n]$	$\boxed{h[n]}$	$y[n] = h[n] \otimes x[n]$
$\hat{\downarrow} F/Z$	$\hat{\downarrow} F/Z$	$\hat{\downarrow} F/Z$
$X(z)$	$\boxed{H(z)}$	$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$
input	transfer function	output spectrum

Basic math stuff*Even and odd functions*

$$\text{Even}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)], \text{ e.g., } \cos(x) = \cos(-x)$$

$$\text{Odd}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)], \text{ e.g., } \sin(x) = -\sin(-x)$$

Roots of second-order polynomial

$$ax^2 + bx + c = 0, x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$$

Logarithms, decibels

$$\log((A \cdot B/C)^D) = D \cdot (\log A + \log B - \log C)$$

$$\log_a b = \log_c b / \log_c a$$

$$\text{decibels } 10 \log_{10}(H^2/H_0^2) = 20 \log_{10}(H/H_0)$$

$$10 \log_{10}(0.5) = 20 \log_{10}(\sqrt{0.5}) \approx -3.01 \text{ dB}$$

$$20 \log_{10}(0.1) = -20 \text{ dB}, 20 \log_{10}(0.01) = -40 \text{ dB}$$

Complex numbers, radii, angles, unit circle

$$i \equiv j = \sqrt{-1} = -1/j$$

$$z = x + jy = r e^{j\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan(y/x) + n\pi, (n=0, \text{ if } x>0, n=1, \text{ if } x<0)$$

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \quad (\text{Euler's formula})$$

$$\cos(\theta) = (1/2) \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta}), \sin(\theta) = (1/2j) \cdot (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}, z_1/z_2 = (r_1/r_2) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|, \angle(A \cdot B) = \angle A + \angle B$$

$$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n (\cos \theta + j \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$$

$$z_k = \sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{r} e^{j(\theta+2\pi k)/N}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

Trigonometric functions

$$1^\circ = \pi/180 \text{ radians} \approx 0.01745 \text{ rad}, 1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi \approx 57.30^\circ$$

$$\text{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$$

$$\sin(\theta)/\theta \rightarrow 1, \text{ when } \theta \rightarrow 0; \text{sinc}(\theta) \rightarrow 1, \text{ when } \theta \rightarrow 0$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (\text{Taylor})$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (\text{Taylor})$$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(\theta)$	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5
θ	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$-\pi/2$
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1
$\cos(\theta)$	0	- $\sqrt{2}/2$	-1	0

$$\pi \approx 3.1416, \sqrt{3}/2 \approx 0.8660, \sqrt{2}/2 \approx 0.7071$$

Geometric series

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}, |a| < 1$$

Continuous-time unit step and unit impulse functions

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt} \mu_\Delta(t), \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t) \quad (\text{Dirac's delta})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)x(t) dt = x(t_0)$$

In DSP notation $2\pi\delta(t)$ is computed $2\pi \int \delta(t) \cdot 1 dt = 2\pi$, when $t=0$, and = 0 elsewhere.

Discrete-time unit impulse and unit step functions

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad \mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Sequence $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$. E.g.: $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1] = \{2, 1, -1\}$, $x[-1] = 2$, $x[0] = 1$, $x[1] = -1$.

Periodic signals

$$\exists T \in \mathbb{R}_+: x(t) = x(t+T), \forall t, T \in \mathbb{R}$$

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+: x[n] = x[n+N], \forall n, N \in \mathbb{Z}$$

Fundamental period T_0, N_0 is the smallest $T > 0, N > 0$.

$$\text{E.g.: } \cos(\omega n) = \cos(\omega n + 2\pi k), e^{j(\omega n)} = e^{j(\omega n + 2\pi k)}$$

Convolution

Convolution is commutative, associative and distributive.

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$y_C[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k > N]$$

Correlation

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-l] = x[l] \otimes y[-l]$$

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n-l]$$

Mean and variance of random signal

$$m_X = \mathbb{E}[X] = \int x p_X(x) dx$$

$$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x) dx = \mathbb{E}[X^2] - m_X^2$$

Frequencies, angular frequencies, periods

Here f_T (sometimes f_s) is the sampling frequency.

$$\text{Frequency } f, [f] = \text{Hz} = 1/\text{s}$$

$$\text{Angular frequency } \Omega = 2\pi f = 2\pi/T, [\Omega] = \text{rad/s (analog)}$$

Normalized angular frequency $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_T, [\omega] = \text{rad/sample (digital)}$.

Normalized frequency in Matlab $f_{MATLAB} = 2f/f_T, [f_{MATLAB}] = 1/\text{sample}$.

Sampling of $x_a(t)$ by sampling frequency f_T

$$x_p[n] = x_a(nT) = x_a(n/f_T)$$

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_T))$$

Integral transforms. Properties

Here all integral transforms share some basic properties. Examples given with CTFT, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$, and $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra. a and b are constants.

Linearity. All transforms are linear.

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Time-shifting. There is a kernel term in transform, e.g.,

$$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

Frequency-shifting. There is a kernel term in signal e.g., $e^{j\omega_k n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$

Conjugate symmetry $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$, then $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$, $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$, $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and even, then $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ and even. If $x[n] \in \mathbb{C}$ and odd, then $X(e^{j\omega})$ purely $\in \mathbb{C}$ and odd.

Time reversal. Transform variable is reversed, e.g.,

$$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

Differentiation. In time and frequency domain, e.g.,

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}), nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

Duality. Convolution property convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain $x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ and multiplication property, vice versa, $x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$

Parseval's relation. Energy in signal and spectral components: $\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

Fourier series of continuous-time periodic signals [cont.

signal \leftrightarrow discrete frequency]

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (\text{synthesis})$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (\text{analysis})$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{jk\Omega_0 t_0}$$

$$e^{jk\Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$$

$$\int_T x_a(\tau) x_b(t - \tau) d\tau \leftrightarrow T a_k b_k$$

$$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \sum_l a_l b_{l-k}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow jk\Omega_0 a_k$$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT) [cont. signal \leftrightarrow cont. frequency]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \text{ (synthesis)}$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \text{ (analysis)}$$

$$x(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k} X(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega k t} x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_k))$$

$$x_a(t) * x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega) X_b(j\Omega)$$

$$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * X_b(j\Omega)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$$

$$tx(t) \leftrightarrow j \frac{d}{dt} X(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

$$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

$$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| < W \\ 0, |\Omega| > W \end{cases}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}$$

$$e^{-at} \mu(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}, \text{ where } \text{Real}\{a\} > 0$$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT) [discrete signal \leftrightarrow cont. frequency]

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \text{ (synthesis)}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \text{ periodic with } 2\pi \text{ (analysis)}$$

$$ax[n-k] \leftrightarrow a e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_k n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_k)})$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$$

$$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)]$$

$$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, |n| \leq N_1 \\ 0, |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1+0.5))}{\sin(\omega/2)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$a\delta[n-k] \leftrightarrow a e^{-jk\omega}$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a| < 1$$

N-point Discrete Fourier-transform (DFT) [discrete signal \leftrightarrow discrete frequency, "discrete-time Fourier series"]

Connection to DTFT: $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, 0 \leq n \leq N-1 \text{ (synthesis)}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, 0 \leq k \leq N-1 \text{ (analysis)}$$

$$x[< n - n_0 >_N] \leftrightarrow W_N^{-kn_0} X[k]$$

$$W_N^{-kn_0} x[n] \leftrightarrow X[< k - k_0 >_N]$$

$$y_C[n] = h[n] \circledast x[n] \leftrightarrow H[k] \cdot X[k] = Y[k]$$

Laplace transform:

Convergence with a certain ROC (region of convergence). Connection to continuous-time Fourier-transform: $s = j\Omega$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \text{ (synthesis)}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \text{ (analysis)}$$

$$ax[n-k] \leftrightarrow a z^{-k} X(z)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1, \text{ ROC all } z$$

$$a\delta[n-k] \leftrightarrow a z^{-k}, \text{ all } z, \text{ except } 0 \text{ (} k > 0 \text{) or } \infty \text{ (} k < 0 \text{)}$$

$$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$-\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| < 1$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

$$na^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z| > |a|$$

$$(n+1)a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, |z| > |a|$$

$$r^n \cos(\omega_0 n) \mu[n] \leftrightarrow \frac{1-r \cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}, |z| > |r|$$

$$r^n \sin(\omega_0 n) \mu[n] \leftrightarrow \frac{r \sin(\omega_0) z^{-1}}{1-2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}, |z| > |r|$$

LTI filter analysis

Stability $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$; unit circle belongs to ROC

Causality $h[n] = 0, n < 0$; ∞ belongs to ROC

Unit step response $s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$

Causal transfer function of order $\max\{M, N\}$

$$H(z) = B(z)/A(z) = K \cdot \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = G \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (1-d_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1-p_n z^{-1})}$$

where zeros d_m : $B(z) = 0$; and poles p_n : $A(z) = 0$

Frequency response $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega}$

Frequency response vs H(z) vs H[k]

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}; H[k] = H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$$

Magnitude response, phase response $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$

$$\text{Group delay } \tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega})$$

Four types of linear-phase FIR filters, $h[n] = h[N-1-n]$ (even/odd symmetric), or $h[n] = -h[N-1-n]$ (e/o antis.). Zeros symmetric w.r.t. unit circle: $r e^{\pm j\theta}$ and $(1/r) e^{\mp j\theta}$.

Important transform pairs and properties:

$$a\delta[n-k] \leftrightarrow a e^{-jk\omega} \leftrightarrow az^{-k}$$

$$a^n \mu[n] \leftrightarrow 1/[1-a e^{-j\omega}] \leftrightarrow 1/[1-az^{-1}]$$

$$ax[n-k] \leftrightarrow a e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}) \leftrightarrow az^{-k} X(z)$$

$$K \cdot \sum_{m=M_1}^{M_2} b_m x[n-m] = \sum_{k=K_1}^{K_2} a_k y[n-k] \leftrightarrow \dots$$

$$\dots K \cdot \frac{\sum_{m=M_1}^{M_2} b_m z^{-m}}{\sum_{k=K_1}^{K_2} a_k z^{-k}} \leftrightarrow K \cdot \frac{\sum_{m=M_1}^{M_2} b_m e^{-jm\omega}}{\sum_{k=K_1}^{K_2} a_k e^{-jk\omega}}$$

$$y[n] = h[n] \circledast x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

rectangle \leftrightarrow sinc, sinc \leftrightarrow rectangle

LTI filter design (synthesis)

Bilinear transform $H(z) = H(s)|_s$ and **prewarping**

$$s = k \cdot (1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}), \quad k = 1 \text{ or } k = 2/T = 2f_T$$

$$\Omega_{\text{prewarp},c} = k \cdot \tan(\omega_c/2), \quad k = 1 \text{ or } k = 2/T = 2f_T$$

Spectral transformations, $\hat{\omega}_c$ desired cut-off

$$\text{LP-LP } z^{-1} = (\hat{z}^{-1} - \alpha) / (1 - \alpha \hat{z}^{-1}), \text{ where}$$

$$\alpha = \sin(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c)) / \sin(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))$$

$$\text{LP-HP } z^{-1} = -(\hat{z}^{-1} + \alpha) / (1 + \alpha \hat{z}^{-1}), \text{ where}$$

$$\alpha = -\cos(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c)) / \cos(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))$$

Windowed Fourier series method

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_c \\ 0, |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \leftrightarrow h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\frac{\omega_c n}{\pi})$$

$$h_{\text{FIR}}[n] = h_{\text{ideal}}[n] \cdot w[n]$$

$$H_{\text{FIR}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{ideal}}(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Fixed window functions, order $N = 2M$, $-M \leq n \leq M$:

Rectangular $w[n] = 1$

$$\text{Hamming } w[n] = 0.54 + 0.46 \cos((2\pi n)/(2M))$$

$$\text{Hann } w[n] = 0.5 \cdot (1 + \cos((2\pi n)/(2M)))$$

$$\text{Blackman } w[n] = 0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{2M})$$

$$\text{Bartlett } w[n] = 1 - (|n|/M)$$

Implementation

Radix-2 DIT N-FFT butterfly equations, $L\{x[n]\} = N$

$$\begin{cases} \Psi_{r+1}[\alpha] = \Psi_r[\alpha] + W_{N_r}^l \Psi_r[\beta] \\ \Psi_{r+1}[\beta] = \Psi_r[\alpha] - W_{N_r}^l \Psi_r[\beta] \end{cases}$$

Inputs $x[n]$ in bit-reversed order in Ψ_1 , outputs in Ψ_R , $R = \log_2 N + 1$; levels Ψ_1, \dots, Ψ_R , $r \in [1, R-1]$; multipliers $W_{N_r} = e^{-j2\pi/N_r}$, $N_r = 2^r$, $l \in [0, 2^{r-1} - 1]$.

Multirate systems

Upsampling (interpolation) with factor L, $\uparrow L$

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ x_u[n] = 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$X_u(z) = X(z^L), X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

Downsampling (decimation) with factor M, $\downarrow M$

$$x_d[n] = x[nM]$$

$$X_d(z) = (1/M) \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{-k})$$

$$X_d(e^{j\omega}) = (1/M) \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$$