Kul-34.3100 Virtausmekaniikan perusteet

Tentti 16.12.2014

Muistathan, että perustelut ovat tärkeä osa laskua ja arvostelua!

Properties of air
density: $\varrho_{\text{air}} = 1.23\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{air}} = 1.79 \times 10^{-5}\,\text{Pa·s}$

Properties of water
density: $\varrho_{\text{water}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{water}} = 1.12 \times 10^{-3}\,\text{Pa·s}$

Gravitational acceleration: $\text{g} = 9.81\,\text{m/s}^2$

Equations When you use these equations, please explain what you are doing and what principle you are applying. Not all the equations may be needed.

Bernoulli equation: $p + \varrho\,\text{g}\,h + \frac{1}{2}\,\varrho\,V^2 = p_T$

Energy balance:

$$\left(p + \varrho\,\text{g}\,h + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,V^2\right)_{\text{out}} = \left(p + \varrho\,\text{g}\,h + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,V^2\right)_{\text{in}} + \text{work done on the CV} - \text{losses}$$

Losses: $\Delta p_{\text{friction}} = \left(f\,\dfrac{L}{D}\right)\,\frac{1}{2}\,\varrho\,V^2$ and $\Delta p_{\text{loss}} = K_{\text{loss}}\,\frac{1}{2}\,\varrho\,V^2$

Reynolds number: $\text{Re}_l = \dfrac{\varrho\,V\,l}{\mu} = \dfrac{V\,l}{\nu}$

Power: $P = \Delta p\;Q$

Mass flux: $\dot{m} = \int_A \varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\text{d}A$

Momentum flux: $\int_A \vec{V}\,\varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\text{d}A$

Momentum balance: $\sum\vec{F} = [\text{momentum flux out}] - [\text{momentum flux in}]$

Moment-of-momentum equation:

$$\Sigma\vec{T} = \dot{m}_{\text{out}}\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_{\text{in}}$$

$$\vec{r}\times\vec{V} = \pm r\,V_\theta$$

Euler turbomachine equation:

$$P = \dot{m}_{\text{out}}\,(\pm U\,V_\theta)_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}\,(\pm U\,V_\theta)_{\text{in}}$$

Buckingham Π-theorem:

If an equation involving k variables is dimensionally homogeneous, it can be reduced to a relationship among $k-r$ independent dimensionless products, where r is the minimum number of reference dimensions required to describe the variables.

Criteria for the repeating variables:

1. The number of repeating variables is equal to the number of reference dimensions.
2. All the required reference dimensions must be included within the group of repeating variables.
3. Each repeating variable must be dimensionally independent of the others.

Moody chart and basic potential functions are at the end of the exam

Colebrook formula:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \begin{cases} -2.0\,\log_{10}\left[\dfrac{\varepsilon/D}{3.7} + \dfrac{2.51}{\mathrm{Re}_D}\left(\dfrac{1}{\sqrt{f}}\right)\right], & \text{implicit form} \\ -1.8\,\log_{10}\left[\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \dfrac{6.9}{\mathrm{Re}_D}\right], & \text{explicit form} \end{cases}$$

Material derivative:

$$\frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\,\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\,\frac{\partial \varrho}{\partial z}$$

Continuity equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{V}} \varrho\,\mathrm{d}\mathscr{V} + \int_A \varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = 0$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\varrho\vec{V}\right) = \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) = 0$$

Navier-Stokes equations: (gravity acts in negative z-direction)

$$\begin{aligned} \varrho\,\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \varrho\,\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \varrho\,\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \varrho\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

Viscous stress for a newtonian fluid: (expressed in *cartesian index notation*)

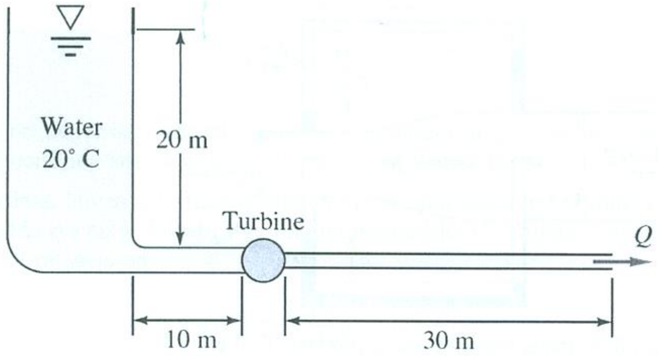
$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \delta_{ij}\,\lambda\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

Tehtävä 1. [6 pts.]

Kuvan 1 mukainen pieni turbiini tuottaa 0.4 kW tehon, kun virtaavan veden tiheys on $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ ja kinemaattinen viskositeetti $\nu = 1.12 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. Turbiiniin yhdistetyt putket on tehty takoraudasta, jolle pinnan karheus on $\epsilon = 0.05\,\mathrm{mm}$. Laske läpi virtaava tilavuusvirta Q.

Pipe #1: $L_1 = 10\,\mathrm{m}$, $D_1 = 8\,\mathrm{cm}$

Pipe #2: $L_2 = 30\,\mathrm{m}$, $D_2 = 5\,\mathrm{cm}$



Kuva 1: Turbiini ja putkisto (Tehtävä 1.).

Tehtävä 2. [6 p.]

Ympyrän muotoinen ilmasuihku, jonka tilavuusvirta on $0{,}03\,\mathrm{m^3/s}$ osuu tasolevyyn kuvan 2 mukaisesti. Suihkun nopeus on $40\,\mathrm{m/s}$. Oletetaan, että virtausnopeuden itseisarvo pysyy vakiona siirryttäessä suihkusta levyn pinnalle ja pitkin levyn pintaa. Määritä:

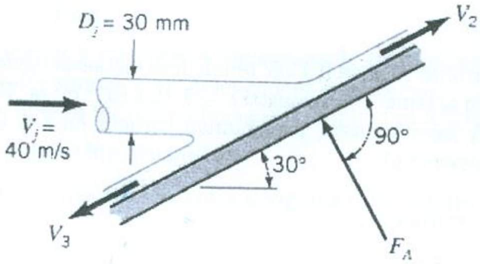
a) Tukivoiman F_A suuruus, kun se pitää levyn paikallaan. Tukivoiman suunta on kuvan mukainen eli kohtisuorassa levyä vastaan.

b) Ylös- ja alaspäin levyllä kääntyvä massavirta.

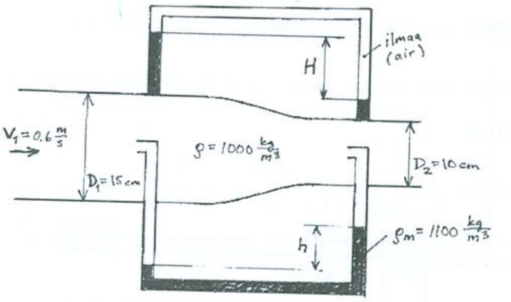
c) Tukivoiman F_A suuruus, kun levy liikkuu oikealle vakionopeudella $10\,\mathrm{m/s}$. Samoin kun edellisissä kohdissa oleta, että suhteessa maahan virtausnopeuden itseisarvo säilyy vakiona siirryttäessä suihkusta levyn pinnalle ja levyn pintaa pitkin.

Tehtävä 3. [6 pts.]

Kuvassa 3 kaventuvaan putkeen on kytketty kaksi Pitot -putkea ja kaksi pietsometriä. Virtaava aine on vettä. Häviöitä ei huomioida. Määritä manometrien lukemat h ja H. Alemman manometrin nesteen tiheys on $1100\,\mathrm{kg/m^3}$.



Kuva 2: Vinoon levyyn iskeytyvä ilmasuihku (Tehtävä 2.).

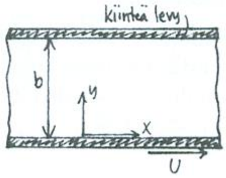


Kuva 3: Virtaus kapenevassa putkessa (Tehtävä 3.).

Mitä häviöitä kuvan virtauksessa voi esiintyä? Mihin suuntaan manometrien lukemat muuttuisivat, jos virtaushäviöitä otettaisiin huomioon (lukuarvoa ei tarvitse laskea)? Perustele vastauksesi.

Tehtävä 4. [6 p.]

Turbulentin putkivirtauksen painehäviö riippuu putken halkaisijasta, pituudesta ja pinnankarheudesta, nesteen tiheydestä ja dynaamisesta viskositeetista, sekä virtausnopeudesta. Kiteytä painehäviön tarkastelu dimensioanalyysin avulla. Mikä yhteys tuloksellasi on Moody-diagrammin kanssa?



Kuva 4: Tehtävän 5 virtaus levyjen välissä.

Tehtävä 5. [6 p.]

a) (2p) Navier–Stokesin yhtälöt ovat liikemäärätase differentiaalisessa muodossa. Tarkastellaan laskennallisesti esim. virtausta kappaleen ympärillä. Mitä eroja on Navier–Stokesin yhtälöistä saadulla ratkaisulla ja potentiaaliteorian mukaisella ratkaisulla? (Vain sanallinen vastaus.)

b) (4p) Ajastariippumattomassa, kaksiulotteisessa, laminaarissa ja täysin kehittyneessä virtauksessa kahden yhdensuuntaisen levyn välissä (kuva 4) Navier-Stokesin yhtälöt voidaan yksinkertaistaa muotoon:

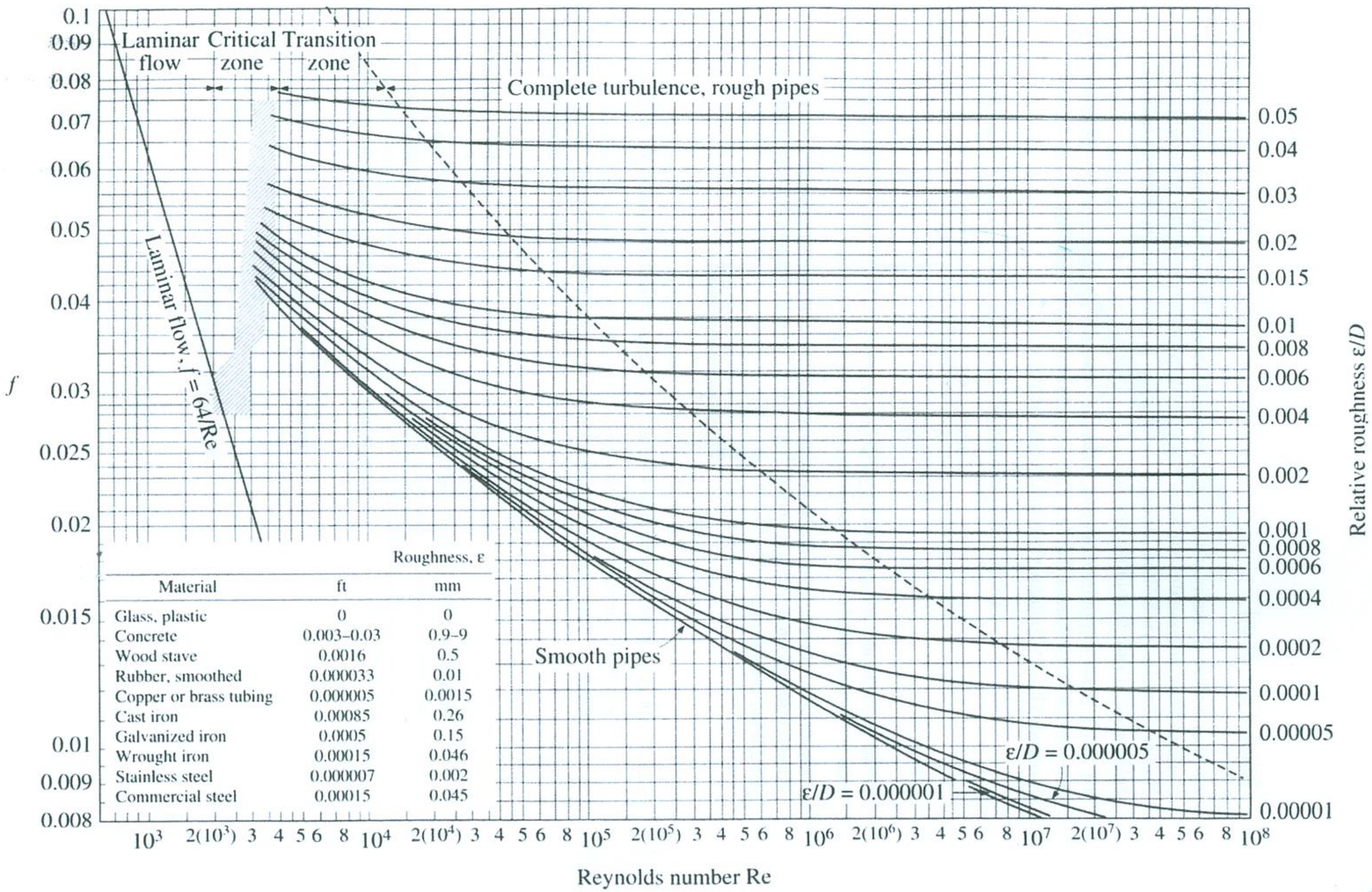
$$
\begin{aligned}
0 &= \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \\
0 &= -\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}
$$

missä u on nopeuskomponentti x-akselin suuntaan ja p on paine, joka riippuu vain x -koordinaatista. Muut nopeuskomponentit ovat nollia.

Tarkastellaan kuvan 4 virtausta kahden yhdensuuntaisen levyn välissä. Levyjen välinen etäisyys on b. Alempi levy liikkuu nopeudella U. Tällöin Navier–Stokesin yhtälöiden ratkaisu on

$$
u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2
$$

missä c_1 ja c_2 ovat tuntemattomia vakioita. Ratkaise vakiot reunaehtojen avulla.



Material	Roughness, ε ft	Roughness, ε mm
Glass, plastic	0	0
Concrete	0.003–0.03	0.9–9
Wood stave	0.0016	0.5
Rubber, smoothed	0.000033	0.01
Copper or brass tubing	0.000005	0.0015
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Wrought iron	0.00015	0.046
Stainless steel	0.000007	0.002
Commercial steel	0.00015	0.045

Summary of Basic, Plane Potential Flows

Description of Flow Field	Velocity Potential	Stream Function	Velocity Components[a]	
Uniform flow	$\phi = U\,(x\,\cos\alpha + y\,\sin\alpha)$	$\psi = U\,(y\,\cos\alpha - x\,\sin\alpha)$	$u = U\,\cos\alpha$	$v = U\,\sin\alpha$
	The velocity U makes an angle α relative to the x-axis.			
Source / sink	$\phi = \dfrac{m}{2\,\pi}\ln r$	$\psi = \dfrac{m}{2\,\pi}\,\theta$	$v_r = \dfrac{m}{2\,\pi\,r}$	$v_\theta = 0$
	If $m > 0$, it is a source. If $m < 0$, it is a sink.			
Free vortex	$\phi = \dfrac{\Gamma}{2\,\pi}\,\theta$	$\psi = -\dfrac{\Gamma}{2\,\pi}\ln r$	$v_r = 0$	$v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\,\pi\,r}$
	If $\Gamma > 0$, it is a counter-clockwise motion ($\circlearrowleft$). If $\Gamma < 0$, it is a clockwise motion ($\circlearrowright$).			
Doublet	$\phi = \dfrac{K\,\cos\theta}{r}$	$\psi = -\dfrac{K\,\sin\theta}{r}$	$v_r = -\dfrac{K\,\cos\theta}{r^2}$	$v_\theta = -\dfrac{K\,\sin\theta}{r^2}$

[a]Velocity components are related to the velocity potential and stream function through relationships:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$