Aalto-yliopisto

MS-A0303 / Kevät 2014

Välikoe 1, 20.3.2014 klo 17-19

Kokeessa saa käyttää laskimia, mutta ei taulukkokirjoja.
Calculators allowed.

Tehtävä 1: Laske ellipsoidin $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 4$ tilavuus tekemällä muuttujanvaihto siten, että sama kappale uusilla muuttujilla u, v, w on pallo $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$.

Calculate the volume of the ellipsoid $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 4$ by doing a change of variables so, that with the new variables u, v, w the solid is a sphere $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$.

Tehtävä 2: Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{y}\right)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

a) Osoita, että kentän $\mathbf{F}$ se kenttäviiva, joka kulkee pisteen $(1, 1, 0)$ kautta, voidaan parametrisoida muodossa $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. (2 p.)

b) Laske $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, missä C on kyseisen kenttäviivan osa pisteestä $(1, 1, 0)$ pisteeseen $(e, e, 1)$. (4 p.)

Let $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{y}\right)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

a) Show that the field line of $\mathbf{F}$ that passes through $(1, 1, 0)$ can be parametrized as $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. (2 p.)

b) Find $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, where C is the part of the field line from $(1, 1, 0)$ to $(e, e, 1)$. (4 p.)

Tehtävä 3: Tarkastellaan vektorikenttää $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2+y^2}{z^2}\mathbf{k}$, kun $z > 0$.

a) Osoita, että vektorikenttä on konservatiivinen.

b) Laske kentän tekemä työ, kun hiukkanen siirretään pisteestä $(1, 1, 1)$ pisteeseen $(2, 4, 3)$ koordinaattiakselien suuntaisista osista koostuvaa murtoviivaa pitkin.

Consider the vector field $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2+y^2}{z^2}\mathbf{k}$, where $z > 0$.

a) Show that the vector field is conservative.

b) Calculate the work done by the field when a particle is moved from $(1, 1, 1)$ to $(2, 4, 3)$ via a path consisting of line segments that are parallel to the coordinate axis.

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

$$\frac{dr}{F_r(r,\phi)} = \frac{r d\phi}{F_\phi(r,\phi)},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

$$\int_c f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt.$$

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\, dt$$

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{d\mathbf{r}}{du}(u,v) \times \frac{d\mathbf{r}}{dv}(u,v)$$

$$\iint_S f\ dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|\, du\ dv$$

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\ dS$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi m$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

(r, φ, z): $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$, $dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$
(ρ, φ, θ): $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, $dV = \rho^2\sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$