

Tentti ja välikoeusinnat 12.11.2014

Merkitse jokaiseen paperiin selvästi tunnistetiedot ja se, onko kyseessä tentti vai välikokeen uusinta.

Välikoe 1: Ratkaise tehtävät 1–4. Välikoe 2: Ratkaise tehtävät 5–8.

Tentti: Ratkaise tehtävät 1, 2, 4, 6 ja 7.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia.

1. Parametrisoi käyrät:

- Jana pisteestä $(-1, 2, 5)$ pisteeseen $(1, 3, 4)$.
- Funktion $f(x) = x^2 + \sin(x)$ kuvaaja $y = f(x)$ välillä $-1 \leq x \leq 2$.
- Ellipsi $ax^2 + by^2 = r$, kun $a, b, r > 0$.

2. Olkoon $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, merkitään $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi$, ja olkoon C yksikköympyrän kehä positiiviseen suuntaan kierrettynä. Laske viivaintegraalit:

a)

$$\int_C \phi \, ds.$$

b)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

3. Kappaleen D hitausmomentti z -akselin suhteen saadaan integraalista

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dV,$$

missä δ on tiheys. Laske epäyhtälöiden $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$, missä $a, h > 0$, määräämän vakiotiheyksisen ($\delta = \delta_0 = \text{vakio}$) sylinterin hitausmomentti z -akselin suhteen.

4. Ajatellaan tähteä W origossa olevana kappaleena, jonka säde on 3 ja tiheys noudattaa funktiota $g(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$. Laske tähden W massa.

5. Määritä vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ divergenssi ja roottori.

6. Olkoon \mathcal{S} sylinteripinta $x^2 + y^2 = 3^2$ ja $0 \leq z \leq 5$. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ vuo pinnan \mathcal{S} läpi, kun sylinteri on suunnistettu z -akselista ulospäin.

7. Laske vektorikentän viivaintegraali

$$\oint_C y^2 \, dx + 3xy \, dy,$$

kun C on puolikieken $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ reuna positiiviseen suuntaan kierrettynä. Vihje: Voit käyttää Greenin lausetta.

8. Laske käyttäen Gaussin lausetta

$$\oiint_{\mathcal{S}} (3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS,$$

jossa \mathcal{S} on pallopinta $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ ulkonormaalina $\hat{\mathbf{N}}$.