Kul-34.3100 Introduction to Fluid Mechanics

Toinen välikoe 2.06.2014

Muistathan, että perustelut ovat tärkeä osa laskua ja arvostelua!

Properties of air
density: $\varrho_{\text{air}} = 1.23\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{air}} = 1.79 \times 10^{-5}\,\text{Pa·s}$

Properties of water
density: $\varrho_{\text{water}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$
(dynamic) viscosity: $\mu_{\text{water}} = 1.12 \times 10^{-3}\,\text{Pa·s}$

Gravitational acceleration: $\mathrm{g} = 9.81\,\text{m/s}^2$

Equations When you use these equations, please explain what you are doing and what principle you are applying. Not all the equations may be needed.

Bernoulli equation: $p + \varrho\,\mathrm{g}\,h + \frac{1}{2}\,\varrho\,V^2 = p_T$

Energy balance:

$$\left(p + \varrho\,\mathrm{g}\,h + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,V^2\right)_{\text{out}} = \left(p + \varrho\,\mathrm{g}\,h + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,V^2\right)_{\text{in}} + \text{work done on the CV} - \text{losses}$$

Losses: $\Delta p_{\text{friction}} = \left(f\,\dfrac{L}{D}\right)\,\frac{1}{2}\,\varrho\,V^2$ and $\Delta p_{\text{loss}} = K_{\text{loss}}\,\frac{1}{2}\,\varrho\,V^2$

Reynolds number: $\mathrm{Re}_l = \dfrac{\varrho\,V\,l}{\mu} = \dfrac{V\,l}{\nu}$

Power: $P = \Delta p\,\mathcal{Q}$

Mass flux: $\dot{m} = \int_A \varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$

Momentum flux: $\int_A \vec{V}\,\varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$

Momentum balance: $\sum \vec{F} = [\text{momentum flux out}] - [\text{momentum flux in}]$

Moment-of-momentum equation:

$$\Sigma\vec{T} = \dot{m}_{\text{out}}\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)_{\text{in}}$$
$$\vec{r}\times\vec{V} = \pm r\,V_\theta$$

Euler turbomachine equation:

$$P = \dot{m}_{\text{out}}\,(\pm U\,V_\theta)_{\text{out}} - \dot{m}_{\text{in}}\,(\pm U\,V_\theta)_{\text{in}}$$

Buckingham Π-theorem:

If an equation involving k variables is dimensionally homogeneous, it can be reduced to a relationship among $k-r$ independent dimensionless products, where r is the minimum number of reference dimensions required to describe the variables.

Criteria for the repeating variables:

1. The number of repeating variables is equal to the number of reference dimensions.
2. All the required reference dimensions must be included within the group of repeating variables.
3. Each repeating variable must be dimensionally independent of the others.

Moody chart and basic potential functions are at the end of the exam

Colebrook formula:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \begin{cases} -2.0\,\log_{10}\left[\dfrac{\varepsilon/D}{3.7} + \dfrac{2.51}{\mathrm{Re}_D}\left(\dfrac{1}{\sqrt{f}}\right)\right], & \text{implicit form} \\ -1.8\,\log_{10}\left[\left(\dfrac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \dfrac{6.9}{\mathrm{Re}_D}\right], & \text{explicit form} \end{cases}$$

Material derivative:

$$\frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\,\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\,\frac{\partial \varrho}{\partial z}$$

Continuity equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{V}} \varrho\,\mathrm{d}\mathscr{V} + \int_A \varrho\,\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = 0$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\varrho\,\vec{V}\right) = \frac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} + \varrho\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) = 0$$

Navier-Stokes equations: (gravity acts in negative z-direction)

$$\varrho\,\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\varrho\,\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\varrho\,\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \varrho\,\mathrm{g}$$

Viscous stress for a newtonian fluid: (expressed in *cartesian index notation*)

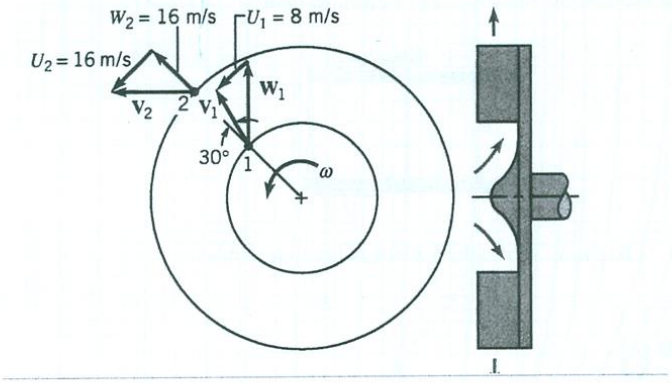
$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \delta_{ij}\,\lambda\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

Tehtävä 1. [6 p.]

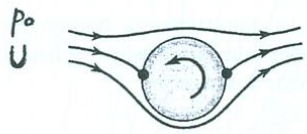
Kuvaan 1 on hahmoteltu nopeuskolmiot eräälle virtauslaitteelle. Virtaava aine on vettä.

a) (4p.) Määritä energian muutos virtaavan aineen massayksikköä (kg) kohden. Onko kyseessä pumppu vai turbiini?

b) (2p.) Piirrä tilanteeseen soveltuva siipisola.



Kuva 1: Tehtävän 1 virtauslaite.



Kuva 2: Tehtävän 2 pyörivä sylinteri.

Tehtävä 2. [6 p.]

Tarkastellaan potentiaalivirtausmallia virtaukselle pyörivän sylinterin ohi. Sylinterin säde on R, tulovirtauksen nopeus U ja paine kaukana sylinterin edessä p_0.

Potentiaaliteoriassa virtaus pyörivän sylinterin (kuva 2) ohi muodostetaan yhdistämällä yhdensuuntaisvirtaus, dipoli, jonka voimakkuus on UR^2, ja vapaa pyörre, jonka voimakkuus on Γ. Asetetaan pyörteen voimakkuudeksi $\Gamma = 2\pi UR$.

a) (1p.) Ratkaise patopisteen paikka.

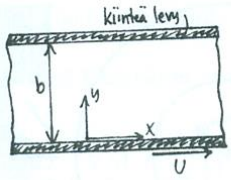
b) (2p.) Ratkaise patopisteen kautta kulkevan virtaviivan yhtälö. Mitä tämä virtaviiva kuvaa?

c) **(1p.)** Laske paine patopisteessä.

d) **(2p.)** Miten vapaa pyörre vaikuttaa sylinteriin kohdistuviin voimiin? (Sanallinen vastaus riittää.)

Tehtävä 3. [6 p.]

Turbulentin putkivirtauksen painehäviö riippuu putken halkaisijasta, pituudesta ja pinnankarheudesta, nesteen tiheydestä ja dynaamisesta viskositeetista, sekä virtausnopeudesta. Kiteytä painehäviön tarkastelu dimensioanalyysin avulla. Mikä yhteys tuloksellasi on Moody-diagrammin kanssa?



Kuva 3: Tehtävän 4 virtaus levyjen välissä

Tehtävä 4. [6 p.]

a) **(2p)** Navier–Stokesin yhtälöt ovat liikemäärätase differentiaalisessa muodossa. Tarkastellaan laskennallisesti esim. virtausta kappaleen ympärillä. Mitä eroja on Navier–Stokesin yhtälöistä saadulla ratkaisulla ja potentiaaliteorian mukaisella ratkaisulla? (Vain sanallinen vastaus.)

b) **(4p)** Ajastariippumattomassa, kaksiulotteisessa, laminaarissa ja täysin kehittyneessä virtauksessa kahden yhdensuuntaisen levyn välissä (kuva 3) Navier-Stokesin yhtälöt voidaan yksinkertaistaa muotoon:

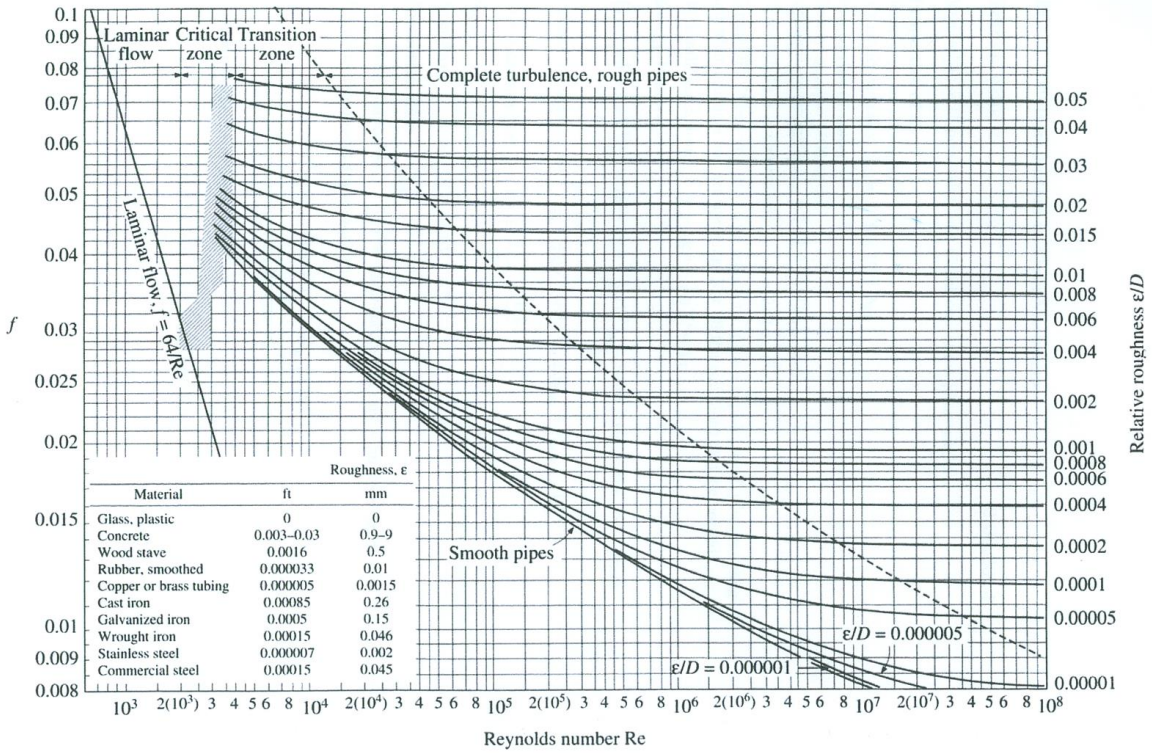
$$0 = \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

missä u on nopeuskomponentti x-akselin suuntaan ja p on paine, joka riippuu vain x -koordinaatista. Muut nopeuskomponentit ovat nollia.

Tarkastellaan kuvan 3 virtausta kahden yhdensuuntaisen levyn välissä. Levyjen välinen etäisyys on b. Alempi levy liikkuu nopeudella U. Tällöin Navier–Stokesin yhtälöiden ratkaisu on

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2$$

missä c_1 ja c_2 ovat tuntemattomia vakioita. Ratkaise vakiot reunaehtojen avulla.



Roughness, ε

Material	ft	mm
Glass, plastic	0	0
Concrete	0.003–0.03	0.9–9
Wood stave	0.0016	0.5
Rubber, smoothed	0.000033	0.01
Copper or brass tubing	0.000005	0.0015
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Wrought iron	0.00015	0.046
Stainless steel	0.000007	0.002
Commercial steel	0.00015	0.045