Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Lindfors

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

1. välikoe 28.1.2015 klo 17–19.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Deltoidi on tasokäyrä, jolla on parametrisointi

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos(2t) \\ y = 2\sin t - \sin(2t), \end{cases}$$

kun $t \in [0, 2\pi]$.
a) Määritä deltoidin tangenttivektori pisteessä $(-1, 2)$, joka vastaa parametrin arvoa $t = \pi/2$.
b) Laske deltoidin kaarenpituus kääntöpuolen kaavojen avulla.
Tarpeeton lisätieto: Deltoidi on 1-säteisen ympyrän kehällä olevan pisteen ratakäyrä, kun ympyrä vierii 3-säteisen ympyrän sisäpuolella. Se on yksinkertaisin *hyposykloidi*: `http://fi.wikipedia.org/wiki/Hyposykloidi` (Katso mieluiten vasta kokeen jälkeen.)

2. Päättele raja-arvo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

jollakin sopivalla kokeilulla ja perustele sen jälkeen, että raja-arvo on todella olemassa.

3. Missä pisteessä (x_0, y_0) funktion

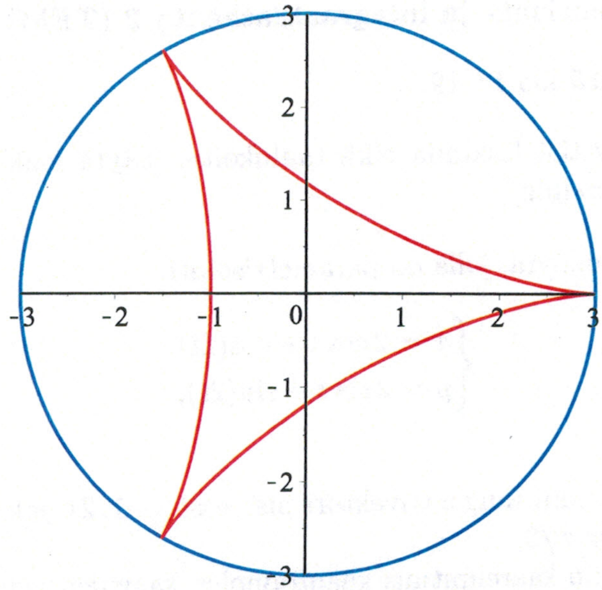
$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy}, \quad x > 0, \ y > 0,$$

gradientille pätee $\nabla f(x_0, y_0) = \bar{0}$ = nollavektori?

4. a) Mikä on ketjusääntö yhdistetylle funktiolle $f(\mathbf{r}(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ eli yhden parametrin tapauksessa?
b) Oletetaan, että funktio $v = v(x,t)$ toteuttaa 1-ulotteisen aaltoyhtälön $v_{tt} = c^2 v_{xx}$, kun $c > 0$ on vakio. Osoita, että funktio $V(x,t) = v(x,-t)$ toteuttaa saman aaltoyhtälön $V_{tt} = c^2 V_{xx}$.
Huom: Kirjoita tarkasti kaikki välivaiheet! Merkintä v_x tarkoittaa osittaisderivaattaa ensimmäisen muuttujan x suhteen (Adamsin kirjassa v_1).

Käännä!

```
> with(plots) :
> deltoidi := plot([2·cos(t) + cos(2·t), 2·sin(t) − sin(2·t), t = 0..2·Pi], color = red) :
> ympyrä := plot([3·cos(s), 3·sin(s), s = 0..2·Pi], color = blue) :
> display({deltoidi, ympyrä})
```




```
> sin(a)^2 + cos(a)^2 = simplify(sin(a)^2 + cos(a)^2); sin(a + b) = expand(sin(a + b));
  cos(a + b) = expand(cos(a + b))
```

$$\sin(a)^2 + \cos(a)^2 = 1$$
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (1)$$

```
> 'int(sqrt(1 − cos(3·t)), t = 0..2·Pi)' = int(sqrt(1 − cos(3·t)), t = 0..2·Pi)
```

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(3\,t)}\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2} \quad (2)$$

```
> kulmat := [alpha, seq(k·Pi/4, k = 0..8)] :
> sinit := map(sin, kulmat) :
> kosinit := map(cos, kulmat) :
> array([kulmat, sinit, kosinit])
```

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{4}\pi & \frac{1}{2}\pi & \frac{3}{4}\pi & \pi & \frac{5}{4}\pi & \frac{3}{2}\pi & \frac{7}{4}\pi & 2\pi \\ \sin(\alpha) & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \cos(\alpha) & 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$