Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Korvenpää

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

2. välikoe 16.2.2015 klo 9–12.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Olkoon $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$f_n(x) = \frac{1}{nx^2+1},$$
kaikilla $n \in \mathbf{N}$.
a) Määritä funktiojonon (f_n) pisteittäinen rajafunktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in \mathbf{R}.$$
b) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$ kohti funktiota f?
c) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti joukossa $[1,\infty[$ kohti funktiota f?
Huom: Kääntöpuolella pari kuvaajaa tilanteen hahmottamiseksi.

2. Olkoon $X =]0,\infty[$ ja metriikkana euklidinen eli tavallinen etäisyys.
a) Osoita suoraan määritelmän perusteella, että $(1/n)_{n\in\mathbf{N}}$ on Cauchy-jono avaruudessa X.
b) Määritellään (homeomorfismi!) $f\colon X \to X$ kaavalla $f(x) = 1/x$. Osoita, ettei $(f(1/n))_{n\in\mathbf{N}}$ ole Cauchy-jono avaruudessa X.

3. Olkoon (X,d) kompakti metrinen avaruus ja $f\colon X \to X$ jatkuva kuvaus, jolla ei ole kiintopisteitä; toisin sanoen $f(x) \neq x$ kaikilla $x \in X$. Osoita: On olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, jolle $d(f(x),x) \geq \varepsilon$ kaikilla $x \in X$. Vihje: Kurssilla käsiteltyjä tietoja jatkuvuudesta saa käyttää.

4. Olkoot (X,d) ja (Y,d') metrisiä avaruuksia. Oletetaan lisäksi, että X on epäyhtenäinen. Osoita, että $X \times Y$ on epäyhtenäinen avaruus. Huom: Tuloavaruuden metriikkana esim. $d + d'$ tai $\max(d,d')$ kuten aikaisemmin kurssilla; sen valinta ei ole olennainen kohta. Projektiokuvausten jatkuvuus oletetaan tunnetuksi, mutta niiden käyttö ei ole välttämätöntä.

Käännä!

Tehtävä 1

> $with(plots):$

> $A := plot\left(\dfrac{1}{2 \cdot x^2 + 1}, x = -2..2, scaling = constrained, color = blue\right):$

> $B := plot\left(\dfrac{1}{5 \cdot x^2 + 1}, x = -2..2, scaling = constrained, color = red\right):$

> $display(\{A, B\})$