

**Kompleksianalyysi / Kevät 2015****Välikoe 2, ti 17.2.2015 klo 16.30–19.30**

Kokeessa saa käyttää laskinta. Laskujen välivaiheet on kirjoitettava käsin näkyviin. Taulukkokirjoja ei sallita.

Tehtävä 1: Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D , ja olkoot lisäksi z_1 ja z_2 pisteitä suljetun yksinkertaisen käyrän C sisäpuolella siten, että C kuuluu alueeseen D .

(a) Näytä, että

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}.$$

(b) Mitä tapahtuu tapauksessa $z_2 \rightarrow z_1$?

Tehtävä 2: Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta},$$

kun $a, b \in \mathbb{R}$ ja $|b| < |a|$.

Tehtävä 3: Ratkaise \mathcal{Z} -muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 0, \quad y(0) = y(1) = 1.$$

Tehtävä 4: Etsi konformikuvaus, joka vie

(a) pisteet $-1, 0, 1$ pisteiksi $-i, 1, i$,

(b) yksikkökieken $\{z : |z| < 1\}$ oikeaksi puolitasoksi $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = \mathcal{Z}(a_n)$, niin

$$\mathcal{Z}(na_n) = -zA'(z), \quad \mathcal{Z}(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$\mathcal{Z}(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0), \quad \mathcal{Z}(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z).$$

Muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = \mathcal{Z}(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z \sin \alpha / (z^2 - 2z \cos \alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z - \cos \alpha) / (z^2 - 2z \cos \alpha + 1)$