Aalto-yliopisto

MS-C1340 / Syksy 2014

Tentti ja välikokeet, 7.1.2015 klo 16.30-19.30

Tentti: Tee tehtävät 1, 3, 4 ja 6.
Final exam: *Answer to problems 1, 3, 4 and 6.*

1. välikokeen rästisuoritus: Tee tehtävät 1, 2 ja 3. **Huom:** koeaika 1. välikokeelle 2 h.
2. välikokeen rästisuoritus: Tee tehtävät 4, 5, 6 ja 7.
Välikokeiden suoritusmahdollisuus vain asiasta etukäteen sopineilla.

Merkitse vastauspaperiin selvästi, mitä koetta suoritat.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
No calculators or tables allowed.

Tehtävä 1: Lineaarikuvauksesta $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiedetään, että
For linear mapping $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *it holds that*

$$
\begin{aligned}
A(1,0,0) &= (2,1,1) \\
A(0,1,0) &= (4,2,1) \\
A(0,0,1) &= (8,4,1).
\end{aligned}
$$

Etsi kannat A:n kuva-avaruudelle ja nolla-avaruudelle. Ovatko A:n matriisiesityksen sarakkeet lineaarisesti riippumattomat? Miksi / miksi eivät?
Find a basis for the image and for the null space of A. Are the columns in the matrix representing A linearly independent? Why / why not?

Tehtävä 2: Mitkä seuraavista ehdoista määrävät lineaarikuvauksen $L_i : C[0,1] \to \mathbb{R}$?

$$
\begin{aligned}
L_1(f) &= f(0) \\
L_2(f) &= \left(\int_0^1 (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
L_3(f) &= \int_0^1 f(x)dx + (f(0))^2
\end{aligned}
$$

Perustele huolellisesti!

Tehtävä 3: Etsi Gram-Schmidtin menetelmällä ortonormaali kanta $\mathbb{R}^3$:n aliavaruudelle

$$\text{span}\{(1,1,0),(1,2,0),(1,1,2)\}.$$

By using the Gram-Schmidt process, find an orthonormal basis for the above subspace of $\mathbb{R}^3$.

Tehtävä 4: Etsi seuraavan matriisin Jordan-hajotelma $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$:
Find the Jordan decomposition $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$ *of the following matrix:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tehtävä 5: Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ homogeenisen yhtälön $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ ratkaisuja ja olkoon $\mathbf{x}^p$ jokin epähomogeenisen yhtälön $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ ratkaisu.

a) Osoita, että myös $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on homogeenisen yhtälön ratkaisu.

b) Osoita, että myös $\mathbf{x}^p + \mathbf{y}$ on epähomogeenisen yhtälön ratkaisu.

Tehtävä 6: Kirjoita differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1' &= -5x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - 2x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

matriisimuotoon ja ratkaise se. Hahmottele myös kuva ratkaisukäyrien käyttäytymisestä ja kerro, miksi kuva on juuri sellainen kuin se on.
Write the system of differential equations above into matrix form, and solve it. Sketch also a picture of the behaviour of the solutions, and explain, why the picture looks the way it does.

Tehtävä 7: Erästä biologista populaatiomallia voidaan kuvata differentiaaliyhtälösysteemillä

$$\begin{cases} x' = x(6 - 2x - y) \\ y' = y(4 - x - y). \end{cases}$$

Tutki, ovatko systeemin tasapainotilat stabiileita, asymptoottisesti stabiileita vai epästabiileita.

Kaavoja ja yhtälöitä:
Some equations:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 \\ q_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} \\ v_{k+1} &= a_{k+1} - \langle a_{k+1}, q_1 \rangle q_1 - \ldots - \langle a_{k+1}, q_k \rangle q_k \\ q_{k+1} &= \frac{v_{k+1}}{||v_{k+1}||} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$

$$||A|| = \max_{|z|=1} ||Az|| = \sigma_1(A^*A)$$

$$Ax = \lambda x$$

$$A^*Az = A^*c$$

$$Rz = Q^*c$$

$$QR = [q_1\ q_2\ \ldots\ q_m] \begin{pmatrix} ||a_1|| & \langle a_2, q_1 \rangle & \ldots & \langle a_m, q_1 \rangle \\ & ||v_2|| & \ldots & \langle a_m, q_2 \rangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & ||v_m|| \end{pmatrix}$$