MS-C2111 Stokastiset prosessit
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Tentti
8.12.2014
L. Leskelä & A. Gutiérrez

Tentissä saa käyttää ylioppilastutkintolautakunnan hyväksymää **laskinta** ja a4-kokoista **muistiinpanolappua**. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero. Tentissä on 5 tehtävää, kukin arvoltaan 6 pistettä.

1. Jalkapallojoukkueet Real Madrid ja Bayern München pelaavat vastakkain. Oletetaan, että Realin pelaajien syötöistä 70 % onnistuu eli menee oman joukkueen pelaajille, ja vastaavasti Bayernin pelaajien syötöistä onnistuu 65 %. Mallinna joukkueiden pallonhallintaa diskreettiaikaisella Markov-ketjulla ja laske sen avulla, kuinka suuren osan ajasta Real Madrid pitää palloa hallussaan.

2. Kuvitteellinen lintulaji lisääntyy seuraavasti. Yksilö munii elämänsä aikana kaksi munaa, joista kustakin kuoriutuu uusi lintu todennäköisyydellä 2/3 — muista riippumattomasti. Ensimmäisessä sukupolvessa on kolme lintua.

   (a) Millä todennäköisyydellä kolmannessa sukupolvessa ei ole yhtään lintua?

   (b) Millä todennäköisyydellä lintulaji kuolee lopulta sukupuuttoon?

3. Avaruuteen lähetetyn luotaimen toiminta-aika T noudattaa eksponenttijakaumaa odotusarvonaan $m = 10$ (vuotta). Merkitään $X_t = 1$, jos luotain on toiminnassa ajanhetkellä t, ja $X_t = 0$ muuten.

   (a) Millä todennäköisyydellä luotain on toiminnassa 10 vuoden kuluttua?

   (b) Perustele, miksi (X_t) on Markov-ketju. Onko (X_t) aikahomogeeninen?

   (c) Ratkaise (X_t):n siirtymämatriisin P_t alkiot $P_t(i,j) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$ kaikilla ajanhetkillä $t \geq 0$.

4. Vaalimaan raja-asemalle saapuu rekkoja riippumattomin eksponenttijakautunein väliajoin keskimäärin 4 rekkaa tunnissa. Saapuvista rekoista kolmasosa ohjataan riippumattomalla satunnaisotannalla tulliin tarkastettavaksi.

   (a) Millä todennäköisyydellä raja-asemalle ei vuorokauden aikana saavu yhtään rekkaa?

   (b) Millä todennäköisyydellä tullin tarkastukseen saapuu vartin aikana vähintään 2 rekkaa?

5. Olkoon $(M_0, M_1, M_2, \dots)$ diskreettiaikainen aikahomogeeninen Markov-ketju tila-avaruudessa $\{-1, 0, +1\}$ siirtymämatriisinaan P. Vastaantulija kadulla väittää, että (M_t) on martingaali oman informaationsa suhteen.

   (a) Anna esimerkki siirtymämatriisista P, jolle väite ei päde.

   (b) Anna esimerkki siirtymämatriisista P, jolle väite pätee.

   (c) Esitä riittävät ja välttämättömät ehdot P:lle, joiden vallitsessa väite pätee.

① $\frac{7}{13} = 53,8\%$

② $\rho_3^{\,3} = 0,007659 \approx 0,77\%$

$\rho_\infty^{\,3} = \frac{1}{64} \approx 1,56\%$

③ a) $\frac{1}{e} \approx 36,8\%$

b) on aidahomay.

c) $P_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-e^{-\frac{t}{10}} & e^{-\frac{t}{10}} \end{bmatrix}$

④ a) $e^{-96} \approx 2,03 \cdot 10^{-42}$

b) $1 - \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{3}} \approx 4,46\%$

⑤

a) , ' '

b) ' , ,

c) $P(a,1) - P(a,-1) = a \quad \forall a$

$Pr(X_{s+t} = x \mid X_{s_1} = x_{s_1}, \ldots, X_{s_n} = x_{s_n})$

$= Pr(1(T > s+t) = x \mid 1(T > s_1) = x_{s_1}, \ldots, 1(T > s_n) = x_{s_n})$

$= 0$, jos $1(T>s) = 0$ ja $x = 1$

$= 1$, jos $1(T>s) = 0$ ja $x = 1$

Jos ~~kaikki~~ $1(T>s) = 1$
$x = 1$

$= Pr(T > s+t \mid T > s, \ldots$