

A''**MS-A0002, Kevät 2015****Tentti / välikoe, 10.3.2015 klo 16-19****Aalto-yliopisto****Tentti:** tee tehtävät 2, 3, 4 ja 6. Koeaika 3 h.**Välikoe 1:** tee tehtävät 1-3. **Koeaika 2 h.****Välikoe 2:** tee tehtävät 4-6. Koeaika 3 h.

Välikokeiden suoritusmahdollisuus vain asiasta etukäteen sopineille.

Merkitse vastauspaperiin selvästi, mitä koetta (välikoe 1, välikoe 2 vai tentti) suoritat.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Kukin tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Alakohdat ovat samanarvoisia, jollei muuta ole mainittu.

Tehtävä 1: Olkoon $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Esitä z polaarimuodossa. Millä kaikilla kokonaisluvuilla n pätee $z^n = z$?

(Trigonometristen funktioiden arvoja on taulukoitu koepaperin lopussa.)

Tehtävä 2: a) Olkoot A ja B neliömatriiseja. Osoita, että tulomatriisi AB on kääntyvä jos ja vain jos sekä A että B ovat kääntyviä.b) Oletetaan, että matriiseille A , B ja C pätee $AB = AC$, ja että A ei ole nollamatriisi. Onko totta, että matriisit B ja C ovat välttämättä samat? Todista väite tai etsi vastaesimerkki.**Tehtävä 3:** Matriisi $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ esittää lineaarikuvausta T ja matriisi $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ esittää lineaarikuvausta H .a) Mikä matriisi esittää lineaarikuvausta $T \circ H$, jossa ensin suoritetaan kuvaus H ja saatuun vektoriin vielä kuvaus T ? (2 p.)b) Etsi käänteismatriisin avulla yhtälön $(BA)\mathbf{x} = (1, 0, -1)^T$ vastaus, kun tiedetään, että

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4 \text{ p.})$$

Tehtävä 4: a) Laske matriisiin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit. (4 p.)

- b) Mitkä ovat ominaisarvojen algebralliset ja geometriset kertaluvut? (1 p.)
- c) Riittävätkö ominaisarvot ja -vektorit määräämään matriisin esittämän lineaarikuvauksen? Miksi / miksi ei? (1 p.)

Tehtävä 5: Eräessä kaupungissa asuvista parisuhteessa olevista ihmisistä 30% eroaa joka vuosi, ja sinkuista aloittaa vuosittain parisuhteen 20%. Eräänä vuonna sinkkuja on 2000 ja parisuhteessa olevia 8000. Mitkä ovat lukumäärät seuraavana vuonna? Entä miten käy ajan mittaan, stabiloituuko tilanne vai päätyvätkö kaikki parisuhteeseen tai sinkuiksi? Perustele vastauksesi tarkastelemalla tilannetta muodossa $x_k = A^k x_0$ sopivalla matriisilla ja tilavektorilla.

Tehtävä 6: a) Mitä tarkoitetaan matriisihajotelmilla?

- b) Valitse seuraavista hajotelmista kaksi ja anna esimerkit tilanteista, joissa niistä olisi hyötyä: LU-hajotelma, diagonaalihajotelma, unitaarinen diagonaalihajotelma, QR-hajotelma, SVD-hajotelma.
- c) Miten neliömatriisin diagonaalihajotelma lasketaan?

Vastaa lyhyesti, mutta kokonaisin lausein.

φ	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$
0	0	1	0
$\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{3}$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$5\pi/12$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}/(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	—