Aalto-yliopisto

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0205 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 **A. Rasila**

Välikokeiden uusinta ja tentti **10.03.2015**

Välikoe 1: 1 – 3; Välikoe 2: 4 – 7; Molemmat välikokeet: 1 – 7;
Tentti: 1, 3, 5, 6, 7.

Laskimet ja taulukot ehdottomasti kiellettyjä.

1. Laske spiraalinpätkän
$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t, \\ y(t) = e^{-t}\sin t, \end{cases}$$
kaarenpituus, jossa parametri $t \in [0, \tau]$. Mitä tapahtuu kun $\tau \to \infty$?

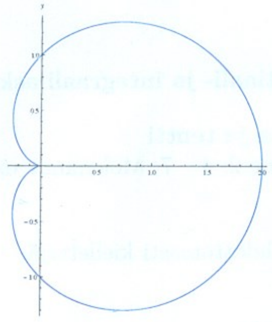
2. Laske raja-arvo
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^2(y-1)^2}{2x^4 + 2(y-1)^4}$$
mikäli se on olemassa, tai perustele miksi raja-arvoa annetussa pisteessä ei ole olemassa.

3. Määritä pinnan $x^3 + 3x^2y + y^2 + 2z = 15$ normaalivektori pisteessä $(1, 2, 0)$.

4. Piirrä kuvio tasojoukosta $D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x + 2\}$. Laske
$$\text{pinta-ala} \quad A = \iint_D dA \quad \text{ja integraali} \quad \iint_D y\, dA.$$

KÄÄNNÄ!

5. Laske napakoordinaatistossa annetun kardioidin $r = 1+\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pinta-ala.



Kuva 1: Kardioidi.

(Vihje: $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$.)

6. Johda funktion $f(x, y) = e^{-x}\cos y$ ensimmäisen kertaluvun Taylorin polynomi pisteen $(0, 0)$ ympäristössä.

7. Ensimmäisen luokan kabaree- ja dragravintola *Moulin Rougen* Cancan-esitysten viihdyttävyys on ekonometrisen mallinnuksen (J. Vartiainen, 2013) perusteella havaittu olennaisesti riippuvan vain puuterin ja huiskujen määrästä. Toimitusjohtaja Mme. de Pompadourin ainoana toiveena on maksimoida myllynsä tuotto, joka on suoraan verrannollinen Cancan-esitysten viihdyttävyyteen.

   Olkoon *Moulin Rougen* yhdessä illassa kuluttama puuterin ja huiskujen määrät x_1 (yksikkö kg) ja x_2 (kappalemäärä), jossa puuteri maksaa 3 e/kg ja huiskut 6 e/kpl. Mme. de Pompadourin käyttökate antaa kuitenkin mahdollisuuden vain 300e sijoitukseen kutakin kabareeiltaa kohden.

   Ikävä kyllä, Mme. de Pompadour oli valitettavan tarkkaamaton juuri sillä luennolla, joilla comte de Lagrangen esittämä *kertojien menetelmä* on esitetty. Auta häntä optimoimalla Lagrangen kertojien menetelmällä Cancan-esityksen tuotto

$$S = 30x_1 - 2x_1^2 + 25x_2 - 0.5x_2^2$$

$$\text{rajoitusehdolla} \quad 3x_1 + 6x_2 = 300$$

   Anna vastaukseksi huiskujen ja puuterin optimimäärät sekä saavutettu maksimituotto.

KÄÄNNÄ!