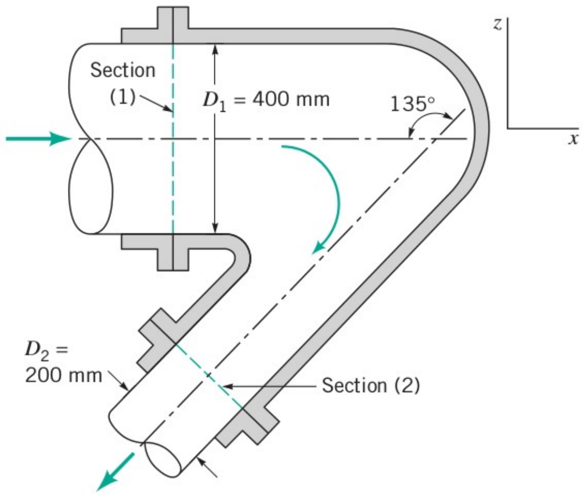
KJR-C2003 Virtausmekaniikan perusteet, K2015

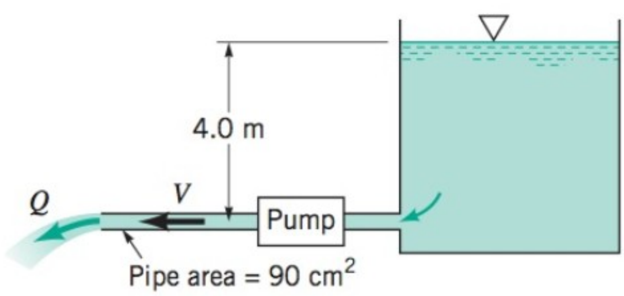
Välikoe 1, perjantai 10.4.2015 13:00-16:00

Lue tehtävät huolellisesti. Selitä laskutehtävissä eri vaiheet. **Pelkät kaavat ja ratkaisu eivät riitä täysiin pisteisiin.**

1. Vastaa lyhyesti (enintään muutama virke) seuraaviin kysymyksiin. Jokaisesta kohdasta 1p.
   a) Mikä on paineen vallitseva yhteys levossa olevassa fluidissa ja miten se voidaan johtaa?
   b) Miten saan manometrillä määritettyä paineita ja miksi?
   c) Mistä osuuksista partikkelikiihtyvyys koostuu ja mitä eri osuudet kuvaavat?
   d) Mitä eroa on kontrollitilavuudella ja partikkelisysteemillä?
   e) Mitä Reynoldsin kuljetuslauseen eri termit tarkoittavat?
   f) Miten muotoilisit sanallisesti kulmaliikemäärän säilymisen taseyhtälön?
2. Kuvan 1 mukainen kapeneva putken mutka kääntää virtausta 135° vertikaalitasossa. Mutkan sisääntulossa halkaisija on 400 mm ja ulostulossa 200 mm. Mutkan virtaustilavuus on 0,2 m^3 poikkileikkausten 1 ja 2 välillä. Veden (tiheys 1000 kg/m^3) tilavuusvirta on 0,4 m^3/s. Paine sisään- ja ulosvirtauksessa on vastaavasti 150 kPa ja 90 kPa. Mutkan massa on 12 kg. Tehtävänäsi on määritä vaaka- (x) ja pystysuuntainen (z) tukivoima, jolla mutka pysyy paikallaan.
   a) Piirrä kontrollitilavuus, jota voit käyttää voimien ratkaisemiseen. (1p)
   b) Kuvaa kaikki valitsemaasi kontrollitilavuuteen vaikuttavat voimat. (1p)
   c) Määritä tukivoiman komponentit. (2+2p, 2p per komponentti, periaate: 1+1p, ratkaisu: 1+1p)
3. Vettä (tiheys 1000 kg/m^3) pumpataan suuresta tankista (kuva 2). Painehäviöiden metreinä tiedetään olevan $4V^2/2g$ ja pumpun nostokorkeus on $h_p = 20 - 40Q^2$, jossa h_p:n yksikkö on m ja Q:n m^3/s. Tehtävänäsi on määrittää tilavuusvirta ja pumpun teho.
   a) Kuvaa tunnetut suureet ja yhtälöt, joita tarvitset tehtävän ratkaisemiseksi. (2p, suureet: 1p, yhtälöt: 1p)
   b) Määritä tilavuusvirta. (2p, periaate: 1p, ratkaisu 1p)
   c) Mikä on pumpun teho tässä tilanteessa? (2p, periaate: 1p, ratkaisu 1p)
4. Pitkä sylinteri (säde r_1) on toisen sylinterin sisällä (säde $r_2 > r_1$), ja sylintereiden välisessä ohuessa raossa on Newtonilaista fluidia. Rako on ohut suhteessa sylintereiden säteeseen, ja virtaus raossa voidaan olettaa laminaariseksi virtaukseksi kahden äärettömän, yhdensuuntaisen levyn välissä. Painovoiman vaikutusta ei tarvitse huomioida. Tehtävänäsi on määrittää momentti, joka tarvitaan ulomman sylinterin pyörittämiseen kulmanopeudella ω, kun sisempi sylinteri pysyy paikallaan.
   a) Piirrä kuva virtausongelmasta sylinterien välissä ja hahmotelma nopeusjakaumasta. (1p)
   b) Listaa oletukset, jotka voit tehdä Navier-Stokes yhtälöiden yksinkertaistamiseksi tässä tilanteessa? (1p)
   c) Ratkaise Navier-Stokes yhtälöiden avulla virtausnopeuden jakauma raossa. (2p)
   d) Mikä on momentti kulmanopeuden, sylinterien mittojen ja aineominaisuuksien funktiona? (2p)



Kuva 1: Tehtävä 2 (Young et al, 2012)



Kuva 2: Tehtävä 3 (Young et al, 2012)

KJR-C2003 Virtausmekaniikan perusteet, kaavakokoelma, VK1

Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{vakio virtaviivalla}$$

Taseyhtälöt

$$\frac{dB_{\mathrm{sys}}}{dt} = \frac{\partial B_{\mathrm{cv}}}{\partial t} - \sum_{\mathrm{in}} \rho V A b + \sum_{\mathrm{out}} \rho V A b$$

$$\frac{dB_{\mathrm{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{cv}} \rho b \, d\cancel{V} + \int_A \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

$$\frac{\partial M_{\mathrm{cv}}}{\partial t} - \sum_{\mathrm{in}} \rho V A + \sum_{\mathrm{out}} \rho V A = 0$$

$$\frac{\partial (M\vec{v})_{\mathrm{cv}}}{\partial t} - \sum_{\mathrm{in}} \rho V A \vec{v} + \sum_{\mathrm{out}} \rho V A \vec{v} = \sum \vec{F}_{\mathrm{cv}}$$

$$\frac{\partial (M\vec{r} \times \vec{v})_{\mathrm{cv}}}{\partial t} - \sum_{\mathrm{in}} \rho V A (\vec{r} \times \vec{v}) + \sum_{\mathrm{out}} \rho V A (\vec{r} \times \vec{v}) = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{\mathrm{cv}}$$

$$\frac{\partial (Me)_{\mathrm{cv}}}{\partial t} + \sum_{\mathrm{out}} \left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho A V - \sum_{\mathrm{in}} \left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho A V = \dot{Q}_{\mathrm{net}} + \dot{W}_{\mathrm{shaft}}$$

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{\mathrm{out}} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{\mathrm{in}} - \left(\breve{u}_{\mathrm{out}} - \breve{u}_{\mathrm{in}} - \frac{\dot{Q}_{\mathrm{net}}}{\dot{m}} \right) + \frac{\dot{W}_{\mathrm{shaft}}}{\dot{m}}$$

Pyörimisliike

$$(\vec{r} \times \vec{v})_z = r v_\theta, \quad (\dot{m} r v_\theta)_{\mathrm{out}} - (\dot{m} r v_\theta)_{\mathrm{in}} = T_{\mathrm{shaft}}, \quad (\dot{m} r \omega v_\theta)_{\mathrm{out}} - (\dot{m} r \omega v_\theta)_{\mathrm{in}} = \dot{W}_{\mathrm{shaft}}$$

Differentiaaliyhtälöt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \; \sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \; \sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \; \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \; \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$