Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Alestalo

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Tentti ja välikoeuusinnat 10.3.2015

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin. **Kirjoita etusivulle, minkä alla olevista vaihtoehdoista valitset.**

Välikoe 1: Tehtävät 1, 2, 3, 4. (korvaa 1. vk pisteet, jos parempi)
Välikoe 2: Tehtävät 5, 6, 7, 8. (korvaa 2. vk pisteet, jos parempi)
Tentti: Tehtävät 2, 4, 6, 7, 8. Harjoituspisteet eivät voimassa tentissä.

1. Tarkastellaan spiraalia $x = e^{-t}\cos(t)$, $y = e^{-t}\sin(t)$, kun $t \in \mathbf{R}$.
   a) Määritä parametrin arvoa $t = 0$ vastaava käyrän tangenttivektori.
   b) Laske spiraalin kierroksen $0 \le t \le 2\pi$ kaarenpituus.

2. Määritä seuraavat raja-arvot tai osoita, ettei raja-arvoa ole olemassa:

$$\text{a) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}; \quad \text{b) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}.$$

3. Olkoon $f(x,y,z) = xy^2z^3$.
   a) Päättele differentiaalia käyttämällä virhearviossa

$$\frac{\Delta f}{f} \lesssim a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y} + c\frac{\Delta z}{z}$$

   esiintyvät kertoimet a, b ja c.
   b) Kuinka suuri suhteellinen virhe saa muuttujien x, y ja z arvoissa olla, jos funktion f suhteellisen virheen täytyy olla korkeintaan $1/100$?

4. Funktiot $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ toteuttavat Cauchy-Riemann-yhtälöparin

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

   Osoita, että funktiot $U(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ja $V(r,\varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Käännä!

5. a) Määritä implisiittisen tasokäyrän $x^3 - x^2y^2 + 2y^3 = 2$ pisteeseen $(1,1)$ asetetun tangentin kulmakerroin.
   b) Määritä ellipsoidin $5x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$ pisteeseen $(1,1,1)$ asetetun tangenttitason yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$.

6. Olkoot $x, y, z > 0$ ja $xyz = 1$. Osoita, että

$$x + y + z \geq 3.$$

   Vihje: Tutki lausekkeen $x + y + z$ ääriarvoja ehdolla $xyz = 1$.

7. Laske epäoleellinen tasointegraali

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-|x|-|y|}\, dA.$$

8. Määritä puoliympyrän $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$ keskiön koordinaatit $\bar{x}$ ja $\bar{y}$.
   Vihje:

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y\, dA.$$

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

α	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\sin(\alpha)$	0	$\sqrt{3}/2$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$1/2$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1