Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Korvenpää

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

Tentti ja välikoeuusinnat 11.3.2015 klo 16.30–19.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin ja merkitse, teetkö tentin vai välikokeen.

Välikoe 1: Tehtävät 1, 2, 3, 4.
Välikoe 2: Tehtävät 5, 6, 7, 8.
Tentti: Tehtävät 1, 2, 4, 7, 8. Harjoitusten lisäpisteitä ei huomioida tentissä.

1. Tarkastellaan välillä $[0,1]$ jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden joukkoa $X = C([0,1])$. Mitkä normiavaruuden ehdoista (N1–3) ovat voimassa, kun funktiolle $f \in X$ määritellään

$$\|f\| = \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| .$$

Huom: Sekaannusten välttämiseksi todettakoon, että tavallisen normin $\|f\|_1$ määritelmässä itseisarvot ovat integraalin sisällä.

2. Olkoon $[x,y]$ tason $\mathbf{R}^2$ pisteiden $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ välinen yhdysjana (= yksi piste, jos $x = y$). Sen pituus on pisteiden x ja y välinen euklidinen etäisyys $\|x - y\|$. Murtoviiva $x\bar{0}y = [x, \bar{0}] \cup [\bar{0}, y]$ on kahden origossa $\bar{0} = (0,0)$ kohtaavan janan yhdiste ja sen pituus on janojen pituuksien summa. Osoita, että kaava

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \text{murtoviivan } x\bar{0}y \text{ pituus}, & \text{jos } x \neq y \end{cases}$$

määrittelee metriikan joukossa $\mathbf{R}^2$.

3. (Valitse kolme kohtaa á 2 p) Anna konkreettinen esimerkki
a) metrisestä avaruudesta, jossa kaikki osajoukot ovat avoimia.
b) metrisestä avaruudesta X ja sen osajoukosta $A \neq \emptyset$, jolle $\partial A = \emptyset$.
c) jatkuvasta funktiosta $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joka kuvaa jonkin avoimen joukon $U \neq \mathbf{R}$ suljetuksi joukoksi.
d) jatkuvasta funktiosta $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jolle jonkin avoimen joukon kuvajoukko ei ole avoin eikä suljettu.

4. Bijektio $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ on bilipschitz-funktio, jos on olemassa vakio $L \geq 1$, jolle pätee

$$\frac{1}{L} d(x,y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq L d(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$. Osoita, että bilipschitz-funktio f on jatkuva joukossa X ja että sen käänteisfunktio f^{-1} on jatkuva joukossa Y.

Käännä!

5. Olkoon $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ tasaisesti jatkuva ja (x_n) Cauchy-jono avaruudessa X. Oletetaan lisäksi, että (Y,d') on täydellinen metrinen avaruus. Osoita, että jono $(f(x_n))$ suppenee avaruudessa Y.

6. Tarkastelaan funktiojonoa (f_n), kun $n \geq 1$ ja $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ määritellään kaavalla
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx).$$
a) Määritä jonon pisteittäinen rajafunktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Suppeneeko jono tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$ kohti rajafunktiota f?
b) Onko voimassa
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R}$$
tai
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx?$$

7. Olkoon $K \subset \mathbf{R}^2$ kompakti joukko. Osoita, että on olemassa sellainen piste $(a_1, a_2) \in K$, että $x \geq a_1$ kaikille pisteille $(x,y) \in K$.

8. Olkoon $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio, joille $f(a)f(b) < 0$ joillakin $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$. Osoita, että joukko
$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) \neq 0\} \subset \mathbf{R}^2$$
on epäyhtenäinen.