Phys-C0220 Termodynamiikka ja statistinen fysiikka, kevät 2015
Tentti 12.5.2015
Ylioppilaskirjoituksissa hyväksytty laskin on sallittu, taulukkokirjat ja muut kaavakokoelmat eivät ole sallittuja.
Paperin kääntöpuolelta löydät mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja.

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin (1p/kohta):

   a) Tarkastellaan kappaleen ja sen ympäristön muodostamaa eristettyä systeemiä. Muodosta entropian tilastollisen määritelmän sekä kappaleen ja ympäristön mikro- ja makrotilojen käsitteiden avulla systeemin termisen tasapainon yhtälö. Tulkitse tuloksesi vielä sanallisesti.

   b) Määrittele Gibbsin vapaaenergia (Gibbsin funktio) ja muodosta sen differentiaalin yleinen lauseke. Miksi se on tärkeä käsite termodynamiikassa?

   c) Mitä tarkoittaa tilastollisen termodynamiikan käsite kanoninen joukko (kanoninen ensemble)?

   d) Mikä on partitiofunktio, ja miten sitä voidaan käyttää systeemin termodynaamisten ominaisuuksien laskemiseen?

   e) Missä tilanteissa ideaalikaasua voidaan pitää klassisena ideaalikaasuna, ja milloin on huomioitava kvantti- tai relativistisia efektejä?

   f) Mikä on ekvipartitioteoreema, ja millä rajoituksilla se on voimassa?

2. Nestemäistä vettä ($T_\mathrm{v} = 10°\mathrm{C}$, $V = 3{,}5\ \mathrm{m}^3$) on termisessä kontaktissa valtavan jäämassan kanssa ($T_\mathrm{j} = -20°\mathrm{C}$). Laske veden ja jäämassan muodostaman systeemin kokonaisentropian muutos, kun terminen tasapaino on saavutettu. Veden sulamislämpö on 333 J g^{-1}, veden ominaislämpö on 4,19 J $\mathrm{g}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$ ja jään ominaislämpö on 2,11 J $\mathrm{g}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$. (6p)

3. Ideaalikaasun vauhtijakauma.

   a) Johda ideaalikaasun Maxwellin-Boltzmannin normitettu vauhtijakauma $f(v)$ lähtien oletuksesta, että kaasuhiukkasten nopeuden komponentit (v_x,v_y,v_z) ovat tilastollisesti toisistaan riippumattomia. (3p)

   b) Mikä on Maxwellin-Boltzmannin vauhtijakaumaa noudattavien kaasuhiukkasten todennäköisimmän vauhdin v_p ja keskimääräisen vauhdin $\langle v \rangle$ suhde? Miten näiden karakterististen vauhtien suhde riippuu lämpötilasta? (3p)

4. Tarkastellaan klassista ideaalikaasua laatikossa (tilavuus $V = L^3$).

   a) Laske kaasuhiukkasen (energia $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, missä m on hiukkasen massa) kanoninen yksihiukkaspartitiofunktio Z_1 käyttämällä tilatiheyttä $g(k)$, joka määritellään $g(k)dk = \frac{Vk^2dk}{2\pi^2}$. (1p)

KÄÄNNÄ

b) Miten Z_1:stä saadaan N:n identtisen hiukkasen klassisen ideaalikaasun kanoninen partitiofunktio Z_N? Perustele vastauksesi. (2p)

c) Helmholtzin vapaaenergia $F = U - TS$ voidaan kirjoittaa $F = -k_\mathrm{B}T \ln Z_N$. Laske ideaalikaasun paine $p = -(\frac{\partial F}{\partial V})_T$. Mitä voit sanoa tuloksesta? (1p)

d) Sisäenergia U saadaan partitiofunktiosta käyttämällä relaatiota $U = -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta}$. Kirjoita lauseke ideaalikaasun entropialle S. Osoita, että saamasi entropia on ekstensiivinen suure. (2p)

5. Tarkastellaan pintaa, missä on K kiinnittymiskohtaa kaasumolekyyleille (kiinnittymisprosessi tunnetaan nimellä adsorptio). Pinta on tasapainossa ideaalikaasun kanssa. Kaasu toimii hiukkasvarantona pinnalle, joten pintaa voidaan käsitellä käyttämällä suurkanonista ensembleä. Kukin K:sta kiinnittymiskohdasta voi olla tyhjä (energia $E_0 = 0$), tai yksi kaasumolekyyli voi olla kiinnittyneenä siihen (energia $E_1 < 0$).

a) Johda lauseke pinnan suurkanoniselle partitiofunktiolle $\mathcal{Z}$ lämpötilan T, pinnan kemiallisen potentiaalin μ, E_1:n ja K:n funktiona. (2p)

b) Käyttäen kohdassa a) laskemaasi partitiofunktiota, kirjoita lauseke pinnan miehitettyjen kiinnittymiskohtien keskimääräiselle osuudelle $\alpha = \alpha(T, E_1, \mu) \equiv \frac{\langle N \rangle}{K}$, missä $\langle N \rangle$ on pinnalle adsoptoituneiden molekyylien keskimääräinen lukumäärä. (2p)

c) Käyttäen tietoa, että pinta on tasapainossa sitä ympäröivän ideaalikaasun kanssa, kirjoita kohdassa b) laskemasi α:n lauseke ympäröivän ideaalikaasun paineen p ja lämpötilan T funktiona, ts. $\alpha = \alpha(p, T, E_1)$. Mitä voit sanoa α:n käytöksestä rajoilla $p \to \infty$, $p \to 0$, $T \to \infty$ ja $T \to 0$? (2p)

Seuraavista tiedoista voi olla apua:

- Stirlingin kaava: $\ln N! \approx N \ln N - N$
- Suurkanoninen partitiofunktio voidaan kirjoittaa $\mathcal{Z} = \sum_i g_i e^{\beta(\mu N_i - E_i)}$, missä g_i on tilan (N_i, E_i) degeneraatio.
- Ideaalikaasun kemiallinen potentiaali voidaan kirjoittaa $\mu = k_\mathrm{B}T \ln(\frac{\lambda_{th}^3 p}{k_\mathrm{B}T})$, missä $\lambda_\mathrm{th} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_\mathrm{B} T}}$.
- Binomilause: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
- $\langle N \rangle = -(\frac{\partial \Phi_G}{\partial \mu})_{T,V} = k_B T (\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu})_{T,V}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$