

Aalto-yliopisto

Perustieteiden korkeakoulu

Matematiikan laitos

Malmivuori

MS-A0503 Todennäköisyysslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

1. välikoe 18.8.2014 klo 16-19

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kursikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TIK, TLT, TUO, YYT.

Write on each paper clearly your name and your student number. Write also headings above; i.e. the name of the course, the course code and on which of the programs ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TIK, TLT, TUO, YYT are you studying; or if you have still another program which is not mentioned here, then write it.

Koeaika on 3h.

Exam time is 3 hours.

Ohjeita tenttiin ja välikokeisiin:

Tentissä ja välikokeissa saa olla mukana ylioppilastutkintolautakunnan hyväksymä laskin, Mellinin tilastolliset taulukot ja a4-kokoinen muistiinpanolappu.

Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla oma nimi ja opiskelijanumero.

Tentissä ja välikokeissa ei jaeta erillistä kaavakokoelmaa. Tilastollisissa taulukoissa ei saa olla omia merkintöjä.

1. (6 p.)

Viesti koostuu numeroista 0 ja 1. Niitä esiintyy siten että numeroa 0 on 40 prosenttia ja numeroa 1 on 60 prosenttia.

Huonossa viestiyhteydessä numero 0 muuttuu numeroksi 1 todennäköisyydellä $1/4$ ja numero 1 muuttuu numeroksi 0 todennäköisyydellä $1/3$.

Mikä on todennäköisyys, että on lähetetty numero 0, jos on vastaanotettu numero 0?

The message of numbers consists of zeros (0) and ones (1). The amount of 40 percent of the numbers are zeros (0) and the amount of 60 percent of the numbers are ones (1).

We have a quite poor information connection so that the sended number 0 in changes into a number 1 with the probability $1/4$ and the sended number 1 is changed into a number 0 with the probability $1/3$.

What is the probability that the number 0 is sended if we have received number 0?

2. (6 p.)

Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on f .

- a) Määritä vakio $c \in R$ siten että funktio $f : R \rightarrow R$

$$\begin{aligned} f(x) &= c; & -1 \leq x \leq 2, \\ f(x) &= 0; & \text{muulloin} \end{aligned}$$

määrittelee tiheysfunktion.

- b) Määritä X :n odotusarvo $E(X)$ ja varianssi $Var(X)$.

- c) Määritä X :n kertymäfunktio.

Let X be a random variable, which has the density function f .

- a) Determine the constant $c \in R$ so that the function $f : R \rightarrow R$

$$\begin{aligned} f(x) &= c; & -1 \leq x \leq 2, \\ f(x) &= 0; & \text{otherwise} \end{aligned}$$

defines a density function.

- b) Determine the expectation value $E(X)$ and the variance $Var(X)$ of the random variable X .

- c) Determine the distribution function of the random variable X ; $F(x) = P(X \leq x)$.

3. (6 p.)

Virheetöntä kolikkoa heitetään 400 kertaa. Näin ollen kullakin kierroksella kolikolla on 2 tulosvaihtoehtoa; kruunu ja klaava. Näillä molemmilla on yhdellä kierroksella todennäköisyys $1/2$ esiintyä.

Määräää normaaliapproksimaatiota käyttäen todennäköisyys, että kokeessa saatujen kruunujen lukumäärä on välillä 195 ja 205.

One coin is tossed 400 times. Thus on each round the coin has two possible outcomes H (head) and T (tail) both of which have probability of $1/2$ to appear.

Determine by using the central limit theorem the probability that the total amount of H (heads) is between the values 195 and 205.

4. (6 p.)

Diskreetin satunnaismuuttujaparin (X, Y) yhtejakauma on seuraava:

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= \frac{1}{4} & P(X = 1, Y = 0) &= \frac{1}{4}, \\ P(X = 0, Y = 1) &= \frac{1}{6}, & P(X = 1, Y = 1) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- a) Määräää satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat.
- b) Ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia?
- c) Määräää ehdollinen jakauma $X | Y = 1$ ja ehdollinen odotusarvo $E(X | Y = 1)$.

The joint distribution of the random variable pair (X, Y) is the following:

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= \frac{1}{4} & P(X = 1, Y = 0) &= \frac{1}{4}, \\ P(X = 0, Y = 1) &= \frac{1}{6}, & P(X = 1, Y = 1) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- a) Determine the distributions of the random variables X and Y .
- b) Are the random variables X and Y independent?
- c) Determine the conditional distribution $X | Y = 1$ and the conditional expectation $E(X | Y = 1)$.