Aalto-yliopisto

MS-A0103 / Syksy 2015

Välikoe 1, ma 28.9.15 klo 18:00–20:00

Ei laskimia, ei taulukoita. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen, alakohdat tasa-arvoiset.

Tehtävä 1: Kumpi kahdesta väittämästä on oikein? Kussakin kohdassa oikea vastaus 1p, lyhyt perustelu 1p.

a) Funktion $f(x) = \arctan\cos x$ arvojoukko on

$$\text{(i)}\quad [-\pi/4, \pi/4], \qquad \text{(ii)}\quad (-\infty, \infty).$$

b) Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, Taylor-sarja origon ympäristössä on

$$\text{(i)}\quad e^x, \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},\quad n \in \mathbb{N}.$$

c) Kompleksilukujen $z_1 = 10 - 5i$ ja $z_2 = 3 - 4i$ osamäärä z_1/z_2 on

$$\text{(i)}\quad 2 + i, \qquad \text{(ii)}\quad 1 + 2i.$$

Tehtävä 2: Laske raja-arvo

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{\sqrt[5]{1+3x}-1}$ käyttämällä sarjakehitelmiä,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$ l'Hôpitalin säännön avulla,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)\arctan x}{x^2}$.

Käännä!

Aalto-yliopisto

MS-A0103 / Syksy 2015

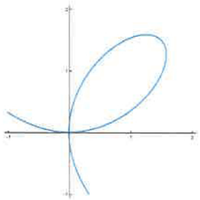
Välikoe 1, ma 28.9.15 klo 18:00–20:00

Tehtävä 3:

a) Määritä yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle $x'(t) - 5x = 3$.

b) Jos $x(0) = 0$ ja $x'(t) = te^{x}$, määritä $x(1)$.

c) Descartesin lehdeksi kutsutaan käyrää, jonka määrittää yhtälö $x^3 + y^3 = 3xy$. Määritä ne pisteet, joissa käyrällä on pysty- tai vaakasuora tangentti, kun $x, y > 0$.



Tehtävä 3c. Descartesin lehti.

Kaavoja:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \qquad |x| < 1,$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |x| < 1,$$

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k \qquad |x| < 1,$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-(k-1))}{k!}.$$