1. (a) Coulombin laki ilmaisee *kahden pistevarauksen välistä sähköistä voimaa:* (1) samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan, vastakkaismerkkiset vetävät toisiaan puoleensa; (2) *voiman suuruus on verrannollinen varausten suuruuksien tuloon ja kääntäen verrannollinen varausten välimatkan neliöön.*

   (b) Kun siirtojohdossa etenee kaksi (samantaajuista) aaltoa vastakkaisiin suuntiin, aaltojen summa muodostaa *seisovan aallon.* Seisovan aallon suhde on *seisovan aallon amplitudimaksimin suhde amplitudiminimiin.* Seisovan aallon suhde mittaa siirtojohdon ja kuorman epäsovitusta.

   (c) Piste on xy-tasolla ($z = 0$), joten $\theta = 90°$. Kulma tasolla on $\phi = 45°$ ja etäisyys origosta on $R = \sqrt{2}$. xy-tasolla yksikkövektori $\hat{\mathbf{z}}$ on sama kuin yksikkövektori $-\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ($\theta = 90°$).

   (d) Integraalimuotoinen Gaussin laki ilmaisee, että *sähkövuo* (eli **D**-kentän pintaintegraali) *suljetun pinnan läpi ulospäin on yhtä suuri kuin pinnan sisään jäävä kokonaisvaraus.*

   (e) Kondensaattorin kapasitanssi mittaa *kondensaattorin kykyä varastoida sähköstaattista energiaa* ja on *kondensaattorin varauksen ja jännitteen vakiosuhdeluku.*

   (f) Tasaisessa magneettikentässä (eli kentässä, jonka suunta ja suuruus ovat vakioita) *pyöreään virtasilmukkaan ei kohdistu magneettista kokonaisvoimaa* olipa silmukan asento mikä tahansa (symmetrian vuoksi voimat kumoavat toisensa). *Silmukaan kohdistuu magneettinen vääntömomentti* (voimapari ja voiman varsi ovat olemassa), jos *magneettikentällä on komponentti silmukan tasossa* (jos silmukan taso on kohtisuorassa magneettikenttää vastaan, vääntömomentti on nolla).

2. (a) Pallosymmetrian vuoksi sähkövuontiheysvektori on muotoa $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{R}}\,D_R(R)$. Soveltamalla integraalimuotoista Gaussin lakia R-säteiseen origokeskiseen palloon saadaan ensiksi sähkövuo pallopinnan läpi:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\hat{\mathbf{R}}\,D_R(R)\right)\cdot\hat{\mathbf{R}}\,R^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi = D_R(R)R^2\left(\Big/_{0}^{2\pi}\,\phi\right)\left(\Big/_{0}^{\pi}(-\cos\theta)\right) = 4\pi R^2 D_R(R).$$

Pallopinnan sisään jäävä kokonaisvaraus $Q(R)$ vaihtelee säteen funktiona:

$$Q(R) = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\rm v}\,d\mathcal{V} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{R=0}^{R}\rho_0 R^2\sin\theta\,dR\,d\theta\,d\phi = \tfrac{4}{3}\pi\rho_0 R^3\,, & 0\le R\le a \\ Q(a) = \tfrac{4}{3}\pi\rho_0 a^3\,, & R > a. \end{cases}$$

Integraalimuotoisen Gaussin lain mukaan kokonaisvaraus pinnan sisällä on yhtä suuri kuin pinnan läpi kulkeva sähkövuo, joten $D_R(R)$ eri alueissa voidaan ratkaista:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = 4\pi R^2 D_R(R) = Q(R) \implies \mathbf{D} = \hat{\mathbf{R}}\,D_R(R) = \hat{\mathbf{R}}\,\frac{Q(R)}{4\pi R^2} = \begin{cases}\hat{\mathbf{R}}\,\dfrac{\rho_0}{3}R\,, & 0\le R\le a\\ \hat{\mathbf{R}}\,\dfrac{\rho_0 a^3}{3R^2}\,, & R > a.\end{cases}$$

   (b) Konservatiivisuus tarkoittaa, että varaukselle tehty työ on riippumaton tiestä, jota pitkin varaus siirretään kahden pisteen välillä. Integraalimuotoisena ehto kuuluu

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

ja (Stokesin lauseen perusteella) differentiaalimuotoisena

$$\nabla\times\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Tutkitaan jälkimmäisen ehdon toteutuminen juuri määritetylle kentällä. Sähkövuontiheys $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$, joten $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0 = \hat{\mathbf{R}}\,E_R(R) = \hat{\mathbf{R}}\,D_R(R)/\epsilon_0$. Siispä pallokoordinaatistossa

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{R}} & \hat{\boldsymbol{\theta}}\,R & \hat{\boldsymbol{\phi}}\,R\sin\theta\\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ D_R(R)/\epsilon_0 & R\times 0 & (R\sin\theta)\times 0\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R^2 \sin\theta} \left[\hat{\mathbf{R}}\,(0-0) - \hat{\boldsymbol{\theta}}\,R\,(0-0) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,R \sin\theta\,(0-0) \right] = \mathbf{0}.$$

Sähkökenttä on siis konservatiivinen.

Jos tehtävän ratkaisisi integraalimuotoista ehtoa tutkimalla, osoittautuisi, että ehdosta jäisi jäljelle vain integrointia säteeltä toiselle ja takaisin eli nollasumma, koska kenttä on säteittäissuuntainen.

3. (a) Suoran virtalangan magneettikenttä *tehtävän koordinaatistossa* on

$$\mathbf{H}_1 = -\hat{\mathbf{z}}\,\frac{I_1}{2\pi x}, \quad a < x < a + w.$$

(Kentän suunnaksi ei kelpaa $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ ilman ϕ-kulman uudelleenmäärittelyä.)

(b) Magneettivuo silmukan läpi on ($d\mathbf{s}$ voi olla $+\hat{\mathbf{z}}$- tai $-\hat{\mathbf{z}}$-suuntainen – *valitaan* $-\hat{\mathbf{z}}$, jotta (c)-kohdassa saadaan positiivinen keskinäisinduktanssi)

$$\Phi_{12} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{h} \int_{x=a}^{a+w} \left(-\hat{\mathbf{z}}\,\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \right) \cdot (-\hat{\mathbf{z}}\ dx\,dy) = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \Big/_{x=a}^{a+w} \ln x = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \ln \frac{a+w}{a}.$$

(c) Koska silmukassa on vain yksi kierros, käämivuo $\Lambda_{12} = N\Phi_{12} = \Phi_{12}$. Keskinäisinduktanssi

$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{a+w}{a}.$$