Aalto-yliopisto

MS-A0202 / Syksy 2014
Välikoe 1, 1.10.2014 klo 17-19

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Tehtävissä kaikki alakohdat ovat samanarvoisia.

Tehtävä 1: Hiukkanen liikkuu avaruudessa pitkin käyrää

$$\begin{cases} x(t) &= t\cos(t) \\ y(t) &= t\sin(t) \\ z(t) &= \frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2} \end{cases} \qquad t \in [0, 6\pi]$$

a) Kuvaile (perustellen!) hiukkasen reitti xyz-koordinaatistossa.

b) Mikä on hiukkasen nopeusvektori pisteessä $(-\pi, 0, \frac{1}{3}(1+\pi^2)^{3/2})$?

c) Kuinka pitkän matkan hiukkanen on liikkunut kuljettuaan pisteestä $(0, 0, \frac{1}{3})$ pisteeseen $(-\pi, 0, \frac{1}{3}(1+\pi^2)^{3/2})$?

Ratkaisu:
Hiukkasen paikkavektori on

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + \frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2}\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Hiukkanen lähtee pisteestä $(0, 0, \frac{1}{3})$ ja kulkee nousevaa, laajenevaa spiraalirataa z-akselin ympäri: x-ja y-koordinaattifunktioiden $\sin$- ja $\cos$-tekijät aiheuttavat pyörimisen z-akselin ympäri, kerroin t niiden edessä lisää etäisyyttä z-akselista t:n kasvaessa. Käyrän projektio xy-tasoon on siis laajeneva spiraali. z-koordinaattifunktion arvot kasvavat neliöllisesti t:n kasvaessa, joten laajeneva spiraali nousee kiihtyen. Hiukkanen ehtii tehdä kolme täyttä kierrosta z-akselin ympäri.

(b) Nopeusvektori

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \big(\cos(t) - t\sin(t)\big)\mathbf{i} + \big(\sin(t) + t\cos(t)\big)\mathbf{j} + t\sqrt{1+t^2}\mathbf{k},$$

pisteessä $(-\pi, 0, \frac{1}{3}(1+\pi^2)^{3/2})$ pätee $t = \pi$, ja nopeusvektori on

$$\mathbf{v}(\pi) = -\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + \pi\sqrt{1+\pi^2}\mathbf{k}.$$

(c) Hiukkasen kulkema matka on

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt &= \int_0^\pi \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + (t\sqrt{1+t^2})^2}dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{(1+t^2) + t^2(1+t^2)}dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{(1+t^2)^2}dt = \int_0^\pi (1+t^2)dt \\
&= \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Tehtävä 2: Tutki ja perustele, voidaanko funktio $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^3 y \sin(y + \frac{\pi}{2})}{x^6 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

määritellä origossa siten, että siitä tulee jatkuva koko tasossa $\mathbb{R}^2$.

Ratkaisu:
Jatkuvalle funktiolle

$$f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

koko määrittelyalueessa. Jotta funktiosta f saataisiin jatkuva origossa, pitäisi sillä olla olemassa raja-arvo origossa, ja funktion arvoksi origossa pitäisi määritellä kyseinen raja-arvo.
Nyt kuitenkin lähestyttäessä origoa x-akselia pitkin

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^6} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

ja lähestyttäessä origoa käytää $y = x^3$ pitkin

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 x^3 \sin(x^3 + \frac{\pi}{2})}{x^6 + x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3 + \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1}{2}.$$

Raja-arvoa ei siis ole olemassa origossa (kahta eri käyrää pitkin lähestyttäessä saadaan eri ehdokas raja-arvoksi), joten funktiota ei voida määritellä niin, että siitä saataisiin jatkuva.

Tehtävä 3: Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio

$$f(x,y) = x^2 y - \frac{y}{x^2+1} + 1.$$

a) Mikä on funktion f gradientti pisteessä $(x,y) = (1,1)$? Mitä se kertoo funktion arvojen muuttumisesta tämän pisteen ympäristössä?

b) Funktio määrää pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$, kun asetetaan $z = f(x,y)$. Etsi tälle pinnalle pisteen $(1, 1, \frac{3}{2})$ kautta kulkevan tangenttitason yhtälö.

Ratkaisu:

(a) Gradientti on

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathbf{j} = (2xy + \frac{2xy}{(x^2+1)^2})\mathbf{i} + (x^2 - \frac{1}{x^2+1})\mathbf{j}.$$

Pisteessä $(1,1)$ saadaan

$$\nabla f(1,1) = \frac{5}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

Gradientti kertoo, mihin suuntaan ko. pisteestä lähdettäessä funktion arvot kasvavat kaikkein voimakkaimmin.

(b) Pinta $z = f(x,y)$ on funktion $g(x,y,z) = z - f(x,y)$ tasa-arvopinta $g(x,y,z) = 0$. Gradientti $\nabla g(x,y,z)$ on tasa-arvopintaa vastaan kohtisuorassa. Lasketaan gradientti:

$$\nabla g(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Pisteessä $(1, 1, \frac{3}{2})$ saadaan

$$\nabla g(1,1,\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Tiedetään, että gradientti on tasa-arvopintaa vastaan kohtisuorassa, joten se on pinnan normaalin suuntainen. Jos piste (x,y,z) on tangenttitasossa, niin tällöin sen ja pisteen $(1,1,\frac{3}{2})$ välinen vektori on gradienttia vastaan kohtisuorassa. Merkitään $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja $\mathbf{r_0} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$. Tällöin vektoreiden $\nabla g(1,1,\frac{3}{2})$ ja $(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$ välinen pistetulo on nolla, eli

$$\Big(-\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\Big) \cdot \Big((x-1)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z - \frac{3}{2})\mathbf{k}\Big) = 0$$

mistä seuraa

$$-\frac{5}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + z - \frac{3}{2} = 0$$

ja sievennettynä edelleen

$$-5x - y + 2z + 3 = 0.$$

Tämä on pisteeseen $(1,1,\frac{3}{2})$ piirretyn tangenttitason yhtälö.