Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Matematiikan laitos . Malmivuori

MS-A0202 Differentiali- ja integraalilaskenta 2

1. välikoe 3.6.2014 klo 16-18

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä muita apuvälineitä. Koeaika on 2h.

No Calculator or any other extra equipment is allowed. Exam time is 2 hours.

1. a) Tutki, onko funktio

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+x+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

jatkuva (0,0):ssa. Todista jatkuvuus määritelmän avulla mikäli päädyt tähän tulokseen.

(b) Todista raja-arvon määritelmän avulla, että funktiolla $f(x,y)=x^3+y^3$ on raja-arvo (0,0):ssa.

a) Study, is the function

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+x+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

continuous at (0,0). If it is continuous prove it by using the definition of the continuity of the function.

(b) Prove by using the definiton of the limit value of function that the function $f(x,y)=x^3+y^3$ has limit value at the point (0,0).

2. Määrää pinnan $z=f(x,y)$, missä $f(x,y)=x^3+xy+y^2$, tangenttitaso ja normaalisuora pisteessä (0,0).

Determine the tangent plane and the normal line of the surface $z=f(x,y)$, where $f(x,y)=x^3+xy+y^2$ at the point (0,0).

3. Minkä pisteiden ympäristössä z on lausuttavissa x:n ja y:n funktiona, $z = z(x, y)$, yhtälöstä $x^2 + y^2 z + e^z + \sin(x) = 1$.

Määrää lisäksi $\frac{\partial z}{\partial y}$ pisteessä $(x, y) = (0, 0)$.

Near which point can z be solved as a function of x and y, $z = z(x, y)$, from the equation $x^2 + y^2 z + e^z + \sin(x) = 1$.

Determine also $\frac{\partial z}{\partial y}$ at the point $(x, y) = (0, 0)$.

MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

1. välikoe 3.6.2014

(1)

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Jos $y=0$, saamme $f(x,0) = \dfrac{x^2+x}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x}$
ja raja-arvo ei ole olemassa kun $x \to 0$;
suoraan $\to \infty$, kun $x \to 0^+$ ja $\to -\infty$, kun $x \to 0^-$.

Näin ollen raja-arvo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ei ole olemassa, eikä f ole silloin jatkuva $(0,0)$:ssa.

b)
$f(x,y) = x^3+y^3$. Jolloin $f(x,0) = x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Siis jos raja-arvo on olemassa sen täytyy yksikäsitteisyyden nojalla on 0.

$$|f(x,y) - 0| = |x^3+y^3| \leq |x^3| + |y^3| = |x|^3 + |y|^3$$

$$\underset{(1)}{\leq} x^2+y^2 \underset{(2)}{\leq} \sqrt{x^2+y^2}$$

(1) = kun $|x| \leq 1$ ja $|y| \leq 1$
(2) = kun $x^2+y^2 \leq 1$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun valitaan $\delta = \varepsilon$, niin on voimassa

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon \quad , \text{kun } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$
$$(\text{ja } \sqrt{x^2+y^2} \leq 1).$$

Näin ollen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(2)

$$z = f(x,y) \quad ; \quad f(x,y) = x^3 + xy + y^2$$

Pinta voidaan kirjoittaa muodossa $F(x,y,z) = 0$, missä $F(x,y,z) = f(x,y) - z$

Pinnan normaali on funktion F gradientin suunta eli $\nabla F(x,y,z)$.

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y \\ x + 2y \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \nabla F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sillä $f(0,0) = 0$.

Tangenttitaso pisteessä $(0,0,0)$ on kohtisuorassa normaalivektoria vastaan, joten tangenttitason yhtälö on

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot (-1) = 0 \implies \underline{\underline{z = 0}}$$

Normaalisuora on pinnan normaalin $(0,0,0)$:ssa suuntainen ja kulkee pisteen $(0,0,0)$ kautta. Joten normaalisuoran yhtälö on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

eli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

3. $z = z(x,y)$; $x^2 + y^2 z + e^z + \sin(x) = 1$. (1)

Merkitään $F(x,y,z) = x^2 + y^2 z + e^z + \sin(x) - 1$.

z on lausuttavissa x:n ja y:n funktiona niiden pisteiden (x,y,z) joissa on voimassa $F_3(x,y,z) \neq 0$.

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = y^2 + e^z > 0$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Eli z:n on lausuttavissa x:n ja y:n funktiona kaikissa ym. yhtälön määräämissä pisteissä.

Derivoidaan yhtälö (1) y:n suhteen.
Saamme

$$2yz + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\left(y^2 + e^z\right) = -2yz \qquad (2)$$

sijoitetaan lukuarvot $\underline{(x,y) = (0,0)}$, jolloin

$0 + 0 + e^z + 0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{z = 0}}$

(2):sta saamme $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)\underbrace{\left(0 + e^0\right)}_{=1} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0 .$$