Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Matematiikan laitos Malmivuori

MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

2. välikoe 17.6.2014 klo 16-19

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä muita apuvälineitä. Koeaika on 3 tuntia.

No Calculator or any other extra equipment is allowed. Exam time is 3 hours.

1. Laske integraali

$$\int\int_A f(x,y)dA,$$

missä A on joukko, joka määräytyy ehdoista $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $x + y \leq 2$ ja funktio f on $f(x,y) = x^2(y+1)$.

Evaluate the integral

$$\int\int_A f(x,y)dA,$$

where A is a set, which is defined by the inequalities $x \geq 0$, $y \geq 0$ and $x + y \leq 2$ and function f is $f(x,y) = x^2(y+1)$.

2. Laske funktion $f(x,y) = x - 2xy + y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x,y) |\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

Calculate the maximum and the minimum value of the function $f(x,y) = x - 2xy + y^2$ in a set $A = \{(x,y) |\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1,$$

kun lisäehto on $y(0) = 1$.

Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1,$$

with the additional condition $y(0) = 1$.

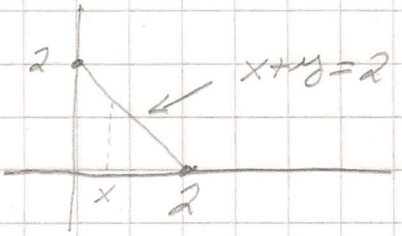
MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

2. välikoe 17.6.2014

1.

$$\iint_A f(x,y)\,dA \quad ; \quad f(x,y) = x^2(y+1)$$

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 2\}.$$



$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq 2-x;\ 0\leq x\leq 2\}$$

Siis $\iint_A f(x,y)\,dA$

$$= \int_0^2\int_0^{2-x} x^2(y+1)\,dy\,dx = \int_0^2 x^2 \Big/_0^{2-x} \left(\frac{y^2}{2}+y\right)\,dx$$

$$= \int_0^2 x^2\underbrace{\left(\frac{(2-x)^2}{2}+2-x\right)}_{\left[\frac{1}{2}(x^2-4x+4)+2-x\right] = \frac{1}{2}x^2-3x+4}\,dx = \int_0^2\left(\frac{1}{2}x^4-3x^3+4x^2\right)dx$$

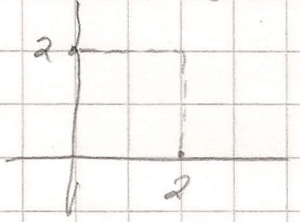
$$= \Big/_0^2\left(\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}-3\frac{x^4}{4}+4\frac{x^3}{3}\right) = \frac{2^5}{2\cdot5}-3\cdot\frac{2^4}{4}+4\cdot\frac{2^3}{3}$$

$$= \frac{2^4}{5}-3\cdot2^2+\frac{2^5}{3} = \frac{16}{5}-12+\frac{32}{3}$$

(2.)

$$f(x,y) = x - 2xy + y^2$$

$$A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}.$$



f on polynomifunktiona differentioituva $\mathbb{R}^2$:ssa.

f on jatkuva A:ssa ja A on suljettu ja rajoitettu, joten f:llä on suurin ja pienin arvo A:ssa.
Se löytyy joko gradientin 0-kohdista A:n sisäpisteissä tai joltakin A:n reunan pisteestä.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2y \\ -2x+2y \end{pmatrix} \text{ ja } \nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 1-2y = 0 \\ 2(y-x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1/2 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1/2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

ja $\underline{f(1/2, 1/2)} = \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{4}}$

Reuna:

1°) $y = 0$; $f(x,0) = x$ $\left(=: h_1(x)\right)$, $0 \le x \le 2$

h_1:llä ei ole derivaatan 0-kohtia, joten tarkastellaan arvot janan päätepisteissä

$\underline{f(0,0) = 0}$ ja $\underline{f(2,0) = 2 - 0 + 0 = 2}$

2°) $x = 0$; $f(0,y) = y^2$ $(=: h_2(y),\ 0 \le y \le 2)$

$h_2'(y) = 2y = 0 \iff y = 0$. Päätepisteet

$\underline{f(0,0) = 0}$ ja $\underline{f(0,2) = 4}$

$3^\circ)$ $x=2$; $f(2,y) = 2 - 4y + y^2$ $(=: h_3(y),\ 0 \le y \le 2)$

$h_3'(y) = 2y - 4 = 0 \iff y = 2$. Päätepisteet

$\underline{f(2,0) = 2}$ ja $\underline{f(2,2)} = 2 - 8 + 2^2 = \underline{-2}$

$4^\circ)$ $y=2$; $f(x,2) = x - 4x + 4$ $(=: h_4(x),\ 0 \le x \le 2)$

$h_4'(x) = -4 > 0$, Päätepisteet

$\underline{f(0,2) = 4}$ ja $\underline{f(2,2) = -2}$

Siis f:n __maksimi__ A:ssa on $\underline{f(0,2) = 4}$

f:n __minimi__ A:ssa on $\underline{f(2,2) = -2}$.

③ $\frac{dy}{dx} + 2y = 1 \quad ; \quad y(0) = 1$

DY on 1. kl. lineaarinen vakiokertoiminen epähomogeeninen yhtälö.

Homogeeninen yhtälö: $y' + 2y = 0$ (3)

Tämä on separoituva yhtälö, eli saamme

$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -2\,dx$

$\iff \ln|y| = -2x + C_1 \iff |y| = e^{-2x+C_1} = e^{C_1} e^{-2x}$

$\iff y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{=:C_2} e^{-2x} = C_2 e^{-2x}$. Yllä $C_1 \in \mathbb{R}$ ja $C_2 \neq 0$.

Lisäksi $y \equiv 0$ on yhtälön (3) ratkaisu, joten yhtälön (3) yleinen ratkaisu on

$y_H = C e^{-2x} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$.

Epähomogeeninen yhtälö: $y' + 2y = 1$ (4)

Nähdään suoraan, että muotoa $y = A$ (= vakio) on (4):n eräs ratkaisu jollakin A.

Siis $y = A$, $y' = 0$. Sijoitetaan (4):ään.

Saamme $0 + 2 \cdot A = 1 \Rightarrow A = 1/2$.

Siis $y_T = \frac{1}{2}$ on (4):n eräs ratkaisu.

Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$y = y_H + y_T = Ce^{-2x} + \frac{1}{2} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$.

Sijoitetaan ehto $y(0) = 7$, jolloin saamme

$y(0) = Ce^0 + \frac{7}{2} = C + \frac{7}{2} = 7 \Rightarrow \underline{C = \frac{7}{2}}.$

Siis ratkaisu on $\underline{\underline{y(x) = \frac{7}{2}(e^{-2x} + 7)}}$