Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Matematiikan laitos Malmivuori

MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Loppukoe 17.6.2014 klo 16-20

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä muita apuvälineitä. Koeaika on 4 tuntia.

No Calculator or any other extra equipment is allowed. Exam time is 4 hours.

1. Tutki onko funktio

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2-y^6, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) jatkuva pisteessä (0,0). Jos funktio on jatkuva, todista jatkuvuus määritelmän avulla.

(b) Määrää funktion f osittaisderivaatat kaikissa pisteissä, jossa ne ovat olemassa.

Conclude is the function

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2-y^6, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) continuous at the point (0,0). If it is continuous prove it by using the definiton of the continuity.

(b) Determine the partial derivatives of the function f at every point where they exist.

2. Olkoon $f(x,y)=\sin(x^2)e^{y^2}$ ja $P_0=(\sqrt{\frac{\pi}{2}},1)$. Määrää funktion f gradientti pisteessä P_0. Määrää lisäksi funktion f suuntaderivaatta suuntaan $\vec{i}+\vec{j}$ pisteessä P_0.

Let $f(x,y) = \sin(x^2)e^{y^2}$ and $P_0 = (\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1)$. Determine the gradient of the funktion f at P_0. Determine also the directional derivative of the function f into the direction $\vec{i} + \vec{j}$ at P_0.

3. Määrää funktion $f(x,y) = x^2 + x + y^2$ suurin ja pienin arvo ellipsillä $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

Determine the maximum and the minimum value of the function $f(x,y) = x^2 + x + y^2$ on the ellipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

4. Laske integraali

$$\int\int_A (x + 2y)dA,$$

missä A on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä (0,0), (1,0) ja (1,2).

Evaluate the integral

$$\int\int_A (x + 2y)dA,$$

where A is a triangel with vertices (0,0), (1,0) and (1,2). (i.e. the triangel is defined by these points).

5. Ratkaise differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} y\tfrac{dy}{dx} - x^2 &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Solve the initial value problem of the differential equation

$$\begin{aligned} y\tfrac{dy}{dx} - x^2 &= 0, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Loppukoe 17.6.2014

(1.)

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^6, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a)

$$|f(x,y) - 0| = |x^2 - y^6| \leq |x^2| + |y^6| = x^2 + y^6$$

$$\underset{(1)}{\leq} x^2 + y^2 \underset{(2)}{\leq} \sqrt{x^2+y^2}$$

(1) = kun $|y| \leq 1$
(2) = kun $x^2 + y^2 \leq 1$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon$. Tällöin

$|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ kun $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$
ja $x^2 + y^2 \leq 1$.

Siis f on jatkuva $(0,0)$:ssa.

b) kun $(x,y) \neq (0,0)$ saamme

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x^5$.

piste $(0,0)$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{h^2 - 0}{h} = h \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

joten $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{-h^6-0}{h} = -h^5 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

joten $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(2) $f(x,y) = \sin(x^2)e^{y^2}$; $P_0 = (\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1)$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2)\cdot 2x \cdot e^{y^2} \\ \sin(x^2)\cdot e^{y^2}\cdot 2y \end{pmatrix} \text{ ja}$$

$$\nabla f(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, 1) = \begin{pmatrix} \overbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}^{=0}\cdot 2\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\cdot e^1 \\ \underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{=1}\cdot e^1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e \end{pmatrix}$$

Koska f differentioituva pisteessä P_0, saadaan suunnatuille derivaatalle seuraavasti

$$D_{\bar{i}+\bar{j}} f(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\left(\frac{\bar{i}+\bar{j}}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2e = \underline{\underline{\sqrt{2}\,e}}$$

(3) $f(x,y) = x^2 + x + y^2$; suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\}$

(Voidaan tehdä Lagrangen menetelmällä) tai sijoittaa esim. $y^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$ funktioon. Tällöin saadaan

$$f(x,y)\big|_A = x^2 + x + (1 - \frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \quad (=: h(x))$$

ja $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

h on jatkuva funktio ja joukko $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}$ on suljettu ja rajoitettu. Näin ollen funktiolla h on maksimi ja minimi joukossa B (ja erityisesti nämä ovat myös f:n maksimi ja minimi joukossa A).

h on jatkuvasti derivoituva, joten nämä löytyvät joko derivaatan 0-kohdista tai välin päätepisteistä.

$h'(x) = x + 1$ ja $h'(x) = 0 \iff x = -1$

$\underline{h(-1)} = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \underline{\frac{1}{2}}$

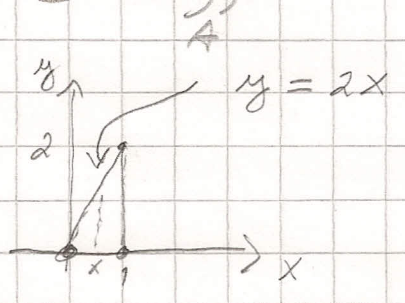
$\underline{h(\sqrt{2})} = \frac{2}{2} + \sqrt{2} + 1 = \underline{2 + \sqrt{2}}$ ja

$\underline{h(-\sqrt{2})} = \frac{2}{2} - \sqrt{2} + 1 = \underline{2 - \sqrt{2}}$.

Siis f:n <u>maksimi</u> on $h(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, 0) = \underline{2 + \sqrt{2}}$

f:n <u>minimi</u> on $h(-1) = f(-1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

4. $\iint_A (x + 2y)\, dA$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2x,\ 0 \le x \le 1\}$



$$\iint_A (x + 2y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \Big/_0^{2x} (xy + y^2)\, dx = \int_0^1 (2x^2 + 4x^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 6x^2\, dx = \Big/_0^1 6 \cdot \frac{x^3}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} - 0 = \underline{\underline{2}}$$

(5.)

$$y\frac{dy}{dx} - x^2 = 0 \quad ; \quad y(0) = 0.$$

DY on 1. kl. yhtälö (epälineaarinen).
DY on kuitenkin separoituva.
Näinollen saamme

$$y\frac{dy}{dx} - x^2 = 0 \iff y\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\iff \int y\,dy = \int x^2\,dx \iff \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$\iff y = \pm\sqrt{2\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)}$$

Sijoitetaan ehto $y(0) = 0$. Saadaan

$$y(0) = \pm\sqrt{2(0 + C_1)} = \pm\sqrt{2C_1} = 0$$

$\Rightarrow C_1 = 0.$ Siis ratkaisu on

$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$. Tämä on määritelty, kun $x \geq 0$.