Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Väisänen

MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ELEC2), syksy 2015
MS-A0106 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ENG2), syksy 2015

1. välikoe 18.11.2015 klo 16.30–18.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Määritä funktion $f(x) = x\cos(3x)$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.
   Huom: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi, kun $x_0 = 0$.

2. Laske raja-arvot
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x+\pi)}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}.$$

3. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
   a) Osoita, että funktio f on aidosti kasvava.
   b) Päättele käänteisfunktion arvo $f^{-1}(2)$ ja laske sitä käyttämällä käänteisfunktion derivaatta
$$(f^{-1})'(2).$$
   Huom: Ei kannata yrittää muodostaa käänteisfunktion lauseketta.

4. a) Laske epäoleellinen integraali
$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$
   b) Käyrä $y = x^3$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $0 \le x \le 1$. Laske näin syntyvän pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala.

Käännä!

MS-A0104/-A0106 VK1/2015

1.

$f(x) = x\cos(3x)$. Koska $\cos(t) = 1 - t^2/2 + O(t^4)$,

niin $\cos(3x) = 1 - (3x)^2/2 + O(x^4) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + O(x^4)$

$\Rightarrow x\cos(3x) = x - \frac{9}{2}x^3 + O(x^5) \Rightarrow P_3(x) = \underline{\underline{x - \frac{9}{2}x^3}}$

(TAI: LASKETAAN DERIVAATAT JNE.)

---

2. L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x+\pi)}{x} \;\text{"0/0"}\; = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x+\pi)\cdot 2}{1} = 2\cos\pi = \underline{\underline{-2}}$$

(TAI: sin-yhteenlaskukaava JNE.)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}} \;\text{"0/0"}\; = \lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\pi x/2)\cdot \pi/2}{-\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \pi\frac{\sin(\pi/2)}{1} = \underline{\underline{\pi}}$$

---

3. $f(x) = x^3 + x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0 \;\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ aidosti kasvava (TAI: x^3 ja x aid. kasv. $\Rightarrow$ niiden summa aid. kasv.)

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektio $\Rightarrow \exists f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x_0) = 2 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Siis $f^{-1}(2) = 1$.

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\cdot 1^2 + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

---

4. a) $$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty 2x(1+x^2)^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\Big/_0^\infty (1+x^2)^{-1} = -\frac{1}{2}(0-1) = \underline{\underline{+\frac{1}{2}}}$$

b) $f(x) = x^3$, $A = 2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, $f'(x) = 3x^2$

$$\Rightarrow A = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = 2\pi\cdot\Big/_0^1 \frac{1}{54}(1+9x^2)^{3/2} = \frac{2\pi}{54}\left(10^{3/2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)}}$$

$$D\left(1+9x^4\right)^{3/2} = \frac{3}{2}\cdot 9\cdot 4x^3\left(1+9x^4\right)^{1/2} = 54x^3\sqrt{1+9x^4}$$