Kirjoita selvästi jokaiseen vastauspaperiin:

- Kurssin koodi, päivämäärä, kokeen tyyppi (välikoe 1)
- Opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- Koulutusohjelma ja vuosikurssi
- Nimikirjoitus

Vastausohje: Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi (paitsi tehtävässä 1). Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä.

Sallitut apuvälineet: Laskin, Mellinin tilastolliset taulukot, ja a4-muistilappu (käsinkirjoitettu, tekstiä vain toisella puolella, oikeassa yläkulmassa opiskelijan nimi)

---

1. Ovatko seuraavat väittämät totta? Vastaa **1** = Totta, **x** = Vastausta ei tunneta annettujen tietojen pohjalta, tai **2** = Tarua. (1 p/kohta)

   (a) Olkoot X_1 ja X_2 satunnaislukuja, joiden odotusarvot ovat $\mathrm{E}[X_1] = \mu_1$ ja $\mathrm{E}[X_2] = \mu_2$. Silloin satunnaisluvun $X_1 - X_2$ odotusarvo on $\mu_1 - \mu_2$.

   (b) Olkoot X_1 ja X_2 satunnaislukuja, joiden varianssit ovat $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma_1^2$ ja $\mathrm{Var}(X_2) = \sigma_2^2$. Silloin satunnaisluvun $X_1 + X_2$ varianssi on $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

   (c) Olkoon X ei-negatiivisia kokonaislukuarvoja saava satunnaisluku. Silloin X:n pistetodennäköisyydet ja X:n odotusarvo voidaan ilmaista todennäköisyydet generoivan funktion $G_X(t) = \mathrm{E}[t^X]$ avulla.

   (d) Minkä tahansa diskreetin satunnaisvektorin $X = (X_1, \ldots, X_n)$ reunapistetodennäköisyysfunktiot voidaan laskea sen yhteispistetodennäköisyysfunktion avulla.

   (e) Kaikille riippumattomille tapahtumille A ja B, joille $\Pr(B) > 0$, on ehdollinen todennäköisyys $\Pr(A|B)$ yhtäsuuri kuin todennäköisyyksien tulo $\Pr(A)\Pr(B)$.

   (f) Jos $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia satunnaislukuja, jotka noudattavat samaa jakaumaa, jonka odotusarvo on μ, niin todennäköisyydellä 1 keskiarvot $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ lähestyvät odotusarvoa μ kun n lähestyy ääretöntä.

   Vihje: Ole erityisen tarkka ja huolellinen.

2. Erään kaupungin asukkaista 42% kannattaa republikaaneja ja loput kannattavat demokraatteja. Pidetyissä vaaleissa kävi äänestämässä republikaanien kannattajista 80% ja demokraattien kannattajista 55%.

   (a) Valitaan umpimähkään yksi kaupungin asukas. Määrää todennäköisyys tapahtumalle "valittu asukas kävi äänestämässä". (3 p)

   (b) Umpimähkään valittua asukasta haastatellaan, ja osoittautuu, että hän oli käynyt äänestämässä. Tämä tieto huomioiden, mikä on todennäköisyys tapahtumalle "valittu asukas on republikaanien kannattaja". (3 p)

3. Olkoon X jatkuva satunnaisluku, jolla on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{kun } x > 1 \\ 0 & \text{kun } x \leq 1 \end{cases}$$

   (a) Laske X:n kertymäfunktion arvot $F(x) = \Pr(X \leq x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (2 p)

   (b) Määrää todennäköisyys $\Pr(2 < X < 4)$. (2 p)

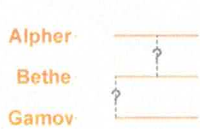
   (c) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathrm{E}[X]$. (2 p)

4. `BubbleSort` on eräs tunnettu järjestysalgoritmi: sen avulla tietokone tuottaa järjestetyn version syötteenä annetusta mielivaltaisessa järjestyksessä olevasta listasta. Tähän kuluva tietokoneen prosessoriaika riippuu algoritmin suorituksessa tarvittavien vertailuoperaatioiden lukumäärästä V ja listan alkioiden pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärästä J. Luvut V ja J puolestaan riippuvat syötteestä. Tässä tehtävässä tarkastellaan `BubbleSort`-algoritmia satunnaisessa järjestyksessä annetulla syötteellä (*Huom. Tehtävän ratkaisemiseksi ei ole välttämätöntä ymmärtää itse algoritmia!*).

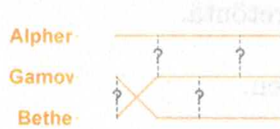
   Tarkastellaan tilannetta, jossa `BubbleSort`-algoritmilla pyritään aakkosjärjestämään kolme sukunimeä: "Alpher", "Bethe" ja "Gamow". Oletetaan nimilistan olevan alunperin täysin umpimähkäisessä järjestyksessä — siten, että kaikkia kuutta kolmen sukunimen mahdollista järjestystä voidaan pitää yhtä todennäköisinä syötteinä. Kuva 1 esittää kaikkia näitä mahdollisia syötteitä vastaavat `BubbleSort`-algoritmin vaiheittaiset etenemiset, ja kertoo kussakin tapauksessa tarvitun vertailuoperaatioiden lukumäärän V sekä pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärän J. Koska syöte on satunnainen, ovat luvut V ja J satunnaismuuttujia.

   (a) Laske satunnaismuuttujien V ja J odotusarvot. (3 p)

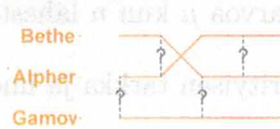
   (b) Laske satunnaismuuttujien V ja J kovarianssi. Päättele, ovatko vertailuoperaatioiden lukumäärä ja pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärä positiivisesti korreloituneet, negatiivisesti korreloituneet, vai lineaarisesti korreloimattomat. (3 p)



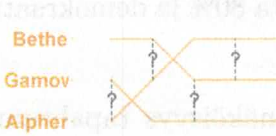
(a) $V = 2$, $J = 0$



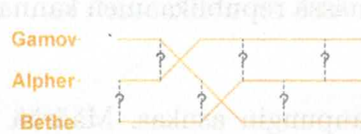
(b) $V = 4$, $J = 1$



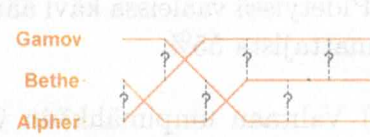
(c) $V = 4$, $J = 1$



(d) $V = 4$, $J = 2$



(e) $V = 6$, $J = 2$



(f) $V = 6$, $J = 3$

Kuva 1: (`BubbleSort`) Mahdolliset järjestykset kolmen sukunimen syötteelle ja niitä vastaavat vertailuoperaatioiden lukumäärät V ja pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärät J.