Aalto-yliopisto

MS-C1340 / Syksy 2015

Loppukoe, 10.12.2015 klo 16.30-19.30

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: Tarkastellaan korkeintaan toisen asteen polynomien muodostamaa avaruutta $\mathbb{P}_2$ ja sen joukkoa $B = \{p_1, p_2, p_3\}$, missä

$$p_1(x) = x^2 - x, \quad p_2(x) = x^2 - 1, \quad p_3(x) = x^2 + x.$$

a) Osoita, että joukko B on vektoriavaruuden $\mathbb{P}_2$ kanta.

b) Esitä derivointioperaattorin $L(p(x)) = p'(x)$ matriisi kannan B suhteen.

Tehtävä 2: Osoita, että matriisin $\mathbf{A}$ jäljelle $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ pätee

a) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ (2 p.)

b) $\det(e^{t\mathbf{A}}) = e^{t\operatorname{tr}(\mathbf{A})}$ (4 p.)

kun $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\Lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (voi olla moninkertaisia ominaisarvoja). Voit tarvittaessa käyttää kurssilla esiintyneitä lauseita sekä tietoja $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$ ja $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$, kun $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Tehtävä 3: Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

a) Ratkaise yhtälö alkuehdolla $\mathbf{x}(0) = (-1, 1)^T$. (4 p.)

b) Miten eri alkuarvoista lähtevät ratkaisut käyttäytyvät? Miksi? Hahmottele myös kuva. (2 p.)

Tehtävä 4: Erästä biologista populaatiomallia voidaan kuvata differentiaaliyhtälösysteemillä

$$\begin{cases} x' = x(6 - 2x - y) \\ y' = y(4 - x - y). \end{cases}$$

Tutki, ovatko systeemin tasapainotilat stabiileita, asymptoottisesti stabiileita vai epästabiileita.