Tentti 27.5.2011 – kommentteja

1. Ratkaise Bellmanin yhtälöä käyttämällä kulutusprobleeman optimiohjaus u^*, jossa maksimoidaan äärettömän aikavälin hyötyä

$$\max_{u_k} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \ln(u_k)$$

tiladynamiikalla $x_{k+1} = \theta(x_k - u_k)$. Diskonttauskerroin $\alpha \in (0,1)$ ja θ on jokin positiivinen vakio. Voit käyttää yritettä $V(x) = a + b\ln(x)$.

Kommentti: tämä tehtävä on tuttu luennolta 2. Muodostetaan Bellmanin yhtälö, sijoitetaan sinne yrite, johon tulee x:n paikalle tilayhtälö. Ratkaistaan oikean puolen optimointitehtävä u:n suhteen ja sijoitetaan takaisin. Vertaamalla löytyy tuntemattomat vakiot.

2. Hae funktionaalin

$$J = \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + 10tx(t)]dt$$

ekstremaali, kun $x(0) = 1$ ja $x(1) = 2$. Antaako ratkaisu funktionaalin minimin vai maksimin?

Kommentti: tämä on variaatiotehtävä jossa on kaksi reunaehtoa. Kts. Kamien-Schwartz s. 21. Ratkaisu antaa funktionaalin minimin, ja sen voi todeta esimerkiksi katsomalla minkä arvon jokin toinen ratkaisuehdotus funktionaalille antaa. Esim. $x(t) = t + 1$, joka toteuttaa reunaehdot, antaa funktionaalille suuremman arvon kuin Euler-Lagrangen avulla laskettu ratkaisuehdotus, joka riittää sen toteamiseen että saatu ratkaisu antaa funktionaalin minimin, koska se on joka tapauksessa ääriarvon antava. Huomaa, että konveksianalyysi ratkaisulle ei riitä minimin/maksimin toteamiseen, koska kyseessä on funktionaalin, ei funktion, ääriarvon hakeminen. Erityistapauksissa integrandin toteaminen konveksiksi argumenttien x ja $\dot{x}$ suhteen olisi riittävä ehto minimille (tätä ei käsitelty kurssilla, kts. K-S s. 42).

3. Sinut valitaan tentin jälkeen opetusministeriksi päättämään koulutuspolitiikasta. Haluat perustella koulutusta mallilla, jossa $x(t)$ on henkilön koulutuspääoman määrä hetkellä t, $k(t)$ on koulutuksen määrä hetkellä t, ja $G(x(t))$ on koulutuspääoman vähentymistä kuvaava funktio. Mallin tilayhtälö on siten $\dot{x} = k - G(x)$.

a) Oletat, että henkilö haluaa maksimoida koko elämänhyötynsä, joka riippuu kahdesta muuttujasta, koulutuspääomasta $x(t)$ ja kulutuksesta $d(t)$. Millainen on kohdefunktio, jos hyöty hetkellä t on $U(x,d)$ ja aikaväli on ääretön? Muista diskonttaus.

b) Malli ei ota vielä vaihtoehtoiskustannuksia huomioon. Oletetaan että muuttujalla $c(t)$ voi kuvata kaikkia kustannuksia jotka koulutuksen käymisestä aiheutuu, eli koulutuksen hinta, saamatta jääneet palkat jne. Toisaalta, koulutuksen käymisellä voi ansaita palkkaa $W(x(t))$. Näiden avulla voi ottaa henkilön koko elämän kustannukset huomioon yhdessä integraalirajoitteessa (ts. palkkojen pitää kattaa kulutus ja kustannukset). Millainen on tämä rajoite?

c) Käsillä on dynaaminen optimointitehtävä integraalirajoitteella. Miten lähtisit ratkomaan sitä? Millä perusteella tehtävä on nopeimman lähestymisen polun tehtävä? Oppositio väittää, että koulutuspolitiikassa pitäisi painottaa koko elämän ajan jatkuvia opintoja, miksi se on väärässä?

Kommentti: tehtävää on käsitelty artikkelissa Spence & Starrett (1975)[1]. Elämänhyöty maksimoidaan integraalilla $\int_0^\infty e^{-rt}U(x,d)dt$. Integraalirajoite on ns. budjettirajoite, ja se on muotoa $\int_0^\infty e^{-rt}[d - W(x) + ck]dt = 0$. Huomaa, että myös rajoitteessa diskontataan – muutenhan äärettömyyteen ulottuvan integraalin arvo on ääretön eikä nolla. Integraalirajoitteen voi ottaa kohdefunktioon mukaan isoperimetrisenä rajoitteena, ja käsitellä sitten tehtävää variaatiotehtävänä tai ratkaista Hamiltonin funktion välttämättömät ehdot. Kohdefunktionaalin integrandin voi manipuloida muotoon jossa on lineaarinen riippuvuus $\dot{x}$:stä, siksi siis tehtävä on nopeimman lähestymisen polun tehtävä, eli stationaariseen ratkaisuun kannattaa edetä mahdollisimman nopeasti (koulutus kannattaa hankkia mahdollisimman nopeasti).

4. Ratkaise tehtävä

$$\min J = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}^2(t)]dt + [x(1)]^2,$$

kun $x(0) = 1$ ja $x(1)$ on vapaa.

Vinkki: muokkaa ongelmaa siten, että myös lopputilakustannus on integraalin sisällä.

Kommentti: tehtävälle voi suoraan kirjoittaa Euler-Lagrangen yhtälön kunhan lopputilakustannuksen saa integraalin sisälle. Siinä pitää ottaa huomioon että puhutaan määrätystä integraalista. Muokattu kohdefunktionaali on $\int_0^1 [x^2 + \dot{x}^2 + 2x\dot{x} + 1]dt$. Pitää vielä ottaa mukaan transversaalisuusehto vapaalle lopputilalle.

5. Tarkastellaan tehtävää, jossa maksimoidaan kulutuksesta $u(t)$ saatava kokonaishyöty

$$\max \int_0^\infty \frac{1}{1-v} e^{-rt}[u(t)]^{1-v}dt$$

kun käytettävissä oleva resurssi $x(t)$ noudattaa yhtälöä

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^2(t) - u(t)$$

ja kun $x(0) = x_0$. Vakiot x_0, a, b ja r ovat positiivisia, ja $a > r$. Karakterisoi steady-state-ratkaisu kulutukselle ja pääomalle.

Kommentti: kierroksen 7 kotitehtävä. Steady-state-ratkaisulle pätee $\dot{x} = 0$ ja $\dot{p} = 0$. Tälle tehtävälle voi kirjoittaa joko Hamiltonin yhtälön tai Euler-Lagrangen jos sijoittaa kohdefunktionaaliin u:n paikalle tilayhtälön.

[1] http://www.jstor.org/stable/2525821