Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, Perustieteiden korkeakoulu — Kinnunen

MS-C.1350 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Loppukoe 22.10.2015 kello 13:00-16:00

Tämä tehtäväsarja on vain syksyn 2015 kurssin osallistujille. Tämä loppukoe vaikuttaa 50 prosenttia kurssin arvosteluun, toinen 50 prosenttia tulee laskuharjoituksista. Jos haluat suorittaa koko kurssin loppukokeella, niin pyydä erillinen tehtäväpaperi valvojalta.

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää ja jos väite on epätosi, niin perustele vastauksesi lyhyesti.

   (a) Napakoordinaateissa esitetty funktio $\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ij\theta}$ on harmoninen tason yksikkökiekossa.

   (b) Jos $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, niin $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \widehat{u}(\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

   (c) Jos $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, niin $\widehat{\Delta u}(\xi) = \Delta \widehat{u}(\xi)$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

   (d) On olemassa sellainen funktio, että $\Delta u(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = 1$ kaikilla $x \in \partial B(0,1)$ ja $u(0) = 0$. epätosi

   (e) Funktio $u(x) = (1 - |x|)^2$ on Dirichletin ongelman

   $$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{joukossa} \quad B(0,1), \\ u = 0 & \text{joukossa} \quad \partial B(0,1), \end{cases}$$

   ratkaisu.

   (f) Ongelmalla

   $$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{joukossa} \quad \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u = 0 & \text{joukossa} \quad \partial \mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

   on yksikäsitteinen ratkaisu.

2. (a) Miten määritellään funktioiden $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ konvoluutio?

   (b) Anna kolme esimerkkiä konvoluution käytöstä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa. Lyhyt kuvailu esimerkeistä riittää.

3. Tarkastellaan lämmön diffuusiota yksiulotteisessa yksikkörenkaassa. Selosta, miten ongelma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & \text{joukossa} \quad (-\pi, \pi) \times (0, \infty), \\ u = g & \text{joukossa} \quad [-\pi, \pi] \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

ratkaistaan muuttujien separointimenetelmällä. Pelkkien päävaiheiden lyhyt sanallinen kuvailu riittää.

4. Oletetaan, että $a > 0$ ja funktio u on yhtälön $\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = 0$ ratkaisu.

   (a) Osoita, että funktio $v(x,t) = u(x, \frac{t}{a})$ toteuttaa yhtälön $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$.

   (b) Osoita, että $w(x,t) = u(bx, b^2 t)$ on toteuttaa yhtälön $\frac{\partial w}{\partial t} - a\Delta w = 0$ kaikilla $b \in \mathbb{R}$.

5. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu sekä $T > 0$.

   (a) Mikä on vertailuperiaate lämpöyhtälölle joukossa $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$? Pelkkä täsmällinen muotoilu riittää, vertailuperiaatetta ei tarvitse todistaa.

   (b) Selosta lyhyesti, miten vertailuperiaatetta voidaan käyttää ratkaisun yksikäsitteisyyden näyttämiseen.