

Välikoe/Mellanförhör/Midterm exam 2 (19.10.2015, 13:00-16:00)

Pisteitä myös hyvästä yrityksestä! **Laskimet ja kirjallisuus kielletty.**  
Poäng också för goda försök! **Kalkylator och litteratur är förbjudna.**  
Points also for good effort! **Calculators and literature forbidden.**

1. Dirichlet-ydin  $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään  $D_N(t) := \sum_{k=-N}^N e^{i2\pi t \cdot k}$ .

a) Laske  $\widehat{D_N} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .

b) Näytä, että  $D_N(t) = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$ , kun  $t \notin \mathbb{Z}$ .

(Vihje:  $2i \sin(\alpha) = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$ , ja  $2i \sin(\pi t) D_N(t) = \dots$ , missä havainto  $(a-b) + (b-c) + (c-d) + (d-e) + (e-f) = a-f$  voi auttaa.)

2. Miten määritellään signaalin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetti Fourier-muunnos?

Miten matriisi  $\begin{bmatrix} -i & -1 & +i & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +i & -1 & -i & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$  esittää diskreettiä Fourier-muunnosta

tapauksessa  $N = 4$ ? Laske signaalin  $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-muunnos, kun

$$(s(0), s(1), s(2), s(3)) = (5, 2, 3, 2).$$

3. Signaalin  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  monitulkintaisuus  $A[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  lasketaan

$$A[s](\tau, u) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \tau} s(t + u/2) s(t - u/2)^* dt.$$

Laske  $A[s]$ , kun  $s(t) = e^{-\pi t^2}$  (tiedämme, että silloin  $\widehat{s} = s$ ).

---

1. Man definierar Dirichlet-kärnan  $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  som  $D_N(t) := \sum_{k=-N}^N e^{i2\pi t \cdot k}$ .

a) Beräkna  $\widehat{D_N} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .

b) Visa, att  $D_N(t) = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$ , när  $t \notin \mathbb{Z}$ .

(Tips:  $2i \sin(\alpha) = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$ , och  $2i \sin(\pi t) D_N(t) = \dots$ , där resultatet  $(a-b) + (b-c) + (c-d) + (d-e) + (e-f) = a-f$  kan vara till hjälp.)

1 sipuli  
100g herkkusientä  
pari isoa kaurallista pinaattia  
2,5 dl kaurakermaa (Oatly)  
basilicua h.

2. Hur definierar man den diskreta Fourier-transformen av signalen

$$s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \text{? På vilket sätt representerar matrisen } \begin{bmatrix} -i & -1 & +i & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +i & -1 & -i & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

den diskreta Fourier-transformen då  $N = 4$ ? Beräkna den diskreta Fourier-transformen av signalen  $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , där

$$(s(0), s(1), s(2), s(3)) = (5, 2, 3, 2).$$

3. *Ambiguiteten*  $A[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  av signalen  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definieras som

$$A[s](\tau, u) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \tau} s(t + u/2) s(t - u/2)^* dt.$$

Beräkna  $A[s]$ , när  $s(t) = e^{-\pi t^2}$  (vi vet att då gäller  $\widehat{s} = s$ ).

1. The *Dirichlet kernel*  $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  is defined by  $D_N(t) := \sum_{k=-N}^N e^{i2\pi t \cdot k}$ .

a) Find  $\widehat{D_N} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ .

b) Show that  $D_N(t) = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$ , when  $t \notin \mathbb{Z}$ .

(Hint:  $2i \sin(\alpha) = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$ , and  $2i \sin(\pi t) D_N(t) = \dots$ , where observation  $(a-b) + (b-c) + (c-d) + (d-e) + (e-f) = a-f$  might help.)

2. How is the discrete Fourier transform of signal  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  defined?

How does the matrix  $\begin{bmatrix} -i & -1 & +i & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +i & -1 & -i & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$  represent the discrete Fourier

transform, when  $N = 4$ ? Find the discrete Fourier transform for signal  $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , when

$$(s(0), s(1), s(2), s(3)) = (5, 2, 3, 2).$$

3. The *ambiguity*  $A[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  of signal  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  is calculated by

$$A[s](\tau, u) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \tau} s(t + u/2) s(t - u/2)^* dt.$$

Find  $A[s]$ , when  $s(t) = e^{-\pi t^2}$  (we know that then  $\widehat{s} = s$ ).