MS-C2111 Stokastiset prosessit
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Tentti
19.10.2015, 13:00–16:00
L. Leskelä

Tentissä saa käyttää ylioppilastutkintolautakunnan hyväksymää **laskinta** ja a4-kokoista **muistiinpanolappua**. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero. Muistiinpanolappua ei tarvitse palauttaa. Tentissä on 4 tehtävää, kukin arvoltaan 0–6 pistettä.

1. Muropakettien mukana aletaan jaella keräilykortteja, joita on viittä eri tyyppiä. Homer haluaa kerätä kokoelman, jossa on vähintään yksi kortti kutakin tyyppiä. Kunkin muropaketin sisällä on yksi kortti, jonka tyyppi noudattaa tasajakaumaa ja on muiden muropakettien sisällöistä riippumaton. Merkitään X_t:llä erityyppisten korttien lukumäärää Homerin kokoelmassa t:n muropaketin avaamisen jälkeen.

   (a) Perustele, miksi $(X_0, X_1, \dots)$ on Markov-ketju, ja esitä ketjun siirtymämatriisi ja siirtymäkaavio. (2 p)

   (b) Laske pistetodennäköisyydet $\mathbb{P}(T_2 = k)$, $k \geq 0$, satunnaiselle kokonaisluvulle $T_2 = \min\{t \geq 0 : X_t = 2\}$. (1 p)

   (c) Laske satunnaisluvun T_2 odotusarvo. (1 p)

   (d) Kuinka monta muropakettia Homerin pitää odotusarvoisesti avata päästäkseen tavoitteeseensa? (2 p)

2. Sukellusveneessä on kolme navigaatiolaitetta, joiden toiminta-ajat ovat toisistaan riippumattomia ja eksponenttijakautuneita odotusarvoinaan 1.0, 1.5 ja 3.0 vuotta. Merellä suoritettavaa tehtävää voidaan jatkaa niin kauan kuin vähintään kaksi navigaatiolaitteista toimii. Nykyhetkellä kaikki navigaatiolaitteet toimivat.

   (a) Kauanko odotusarvoisesti kestää, ennen kuin yksi navigointilaitteista lakkaa toimimasta? (1.5 p)

   (b) Millä todennäköisyydellä kaikki navigointilaitteet toimivat kahden vuoden kuluttua? (1.5 p)

   (c) Kuinka kauan sukellusvene voi odotusarvoisesti jatkaa tehtäväänsä, jos ainoa tehtävän kestoa rajoittava tekijä on navigaatiolaitteiden toiminta? (3 p)

3. Anna esimerkki (ja perustele vastauksesi) sellaisesta diskreettiaikaisesta satunnaisprosessista $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$, että

   (a) (M_t) on alimartingaali mutta ei martingaali, (2 p)

   (b) (M_t) on martingaali ja Markov-ketju, (2 p)

   (c) (M_t) ei ole martingaali eikä Markov-ketju. (2 p)

4. Yksisuuntaiselle kadulle saapuu parkkipaikkaa etsiviä tyypin $i = 1, 2$ autoja odotusarvoisesti ℓ_i minuutin välein ($\ell_1 = 3$, $\ell_2 = 10$). Kadulla on yksi parkkiruutu. Jos auton saapumishetkellä parkkiruutu on vapaa, auto pysäköi siihen välittömästi. Muussa tapauksessa auto jatkaa matkaansa. Tyypin i auto viipyy parkkiruudussa odotusarvoisesti m_i minuuttia ($m_1 = 5$, $m_2 = 20$). Tyypin i autojen saapumisten väliajat ja pysäköintiajat ovat toisistaan riippumattomat ja eksponenttijakautuneet. Lisäksi tyypin 1 autot käyttäytyvät tyypin 2 autoista riippumattomasti. Nykyhetkellä parkkiruutu on vapaa.

   (a) Mallinna parkkiruudun tilaa jatkuva-aikaisena Markov-ketjuna. Kirjoita ketjun generaattorimatriisi ja piirrä ketjun siirtymäkaavio. (2 p)

   (b) Millä todennäköisyydellä kadulle saapuu vähintään 2 autoa tunnin kuluttua alkavan 5 minuutin aikajakson kuluessa? (1 p)

   (c) Selitä, miten tietokonetta apuna käyttäen voidaan laskea todennäköisyys, että parkkiruutu on vapaa 30 minuutin kuluttua nykyhetkestä. (1 p)

   (d) Kuinka suuren osan ajasta parkkiruutu on pitkällä aikavälillä vapaa? (1 p)

   (e) Vastaa (d)-kohtaan, kun oletetaan että eksponenttijakauman sijaan tyypin i autojen pysäköintiajat noudattavat välin $[0, 2m_i]$ tasajakaumaa. (1 p)