

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa potentiaali on siis  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ . Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right), \quad (3)$$

missä  $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ .

a) Käyttäen  $\hat{x}$ :n ja  $\hat{p}$ :n peruskommutaatiorelaatiota johda kommutaatiorelaatio  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ . (1p.)

b) Laske  $\langle p \rangle$  ja  $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$  tilalle  $|\psi\rangle = 2/\sqrt{5} [ |1\rangle - \frac{1}{2}|2\rangle ]$ , missä  $|n\rangle$  on harmonisen oskillaattorin energian ominaistila. (3 p.)

c) Mikä on harmonisen oskillaattorin ensimmäinen viritystila, jos perustila on

$\phi_0(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)/(\pi\sigma^2)^{1/4}$  (perustelut)? (2 p.)

Apuna:

- $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

4. a) Mitä muotoa ovat siirto-operaattorin ( $\hat{D}\phi(x) = \phi(x+d)$ ) ominaistilat. (2 p.)

b) Oleta, että potentiaali on jaksollinen periodilla  $d$  ts.  $V(x) = V(x+d)$ . Osoita, että siirto-operaattori kommutoi Hamiltonin operaattorin kanssa kanssa (2 p.)

c) Osoita, että kahdella kommutoivalla operaattorilla on yhteiset ominaistilat (voit olettaa, että meillä ei ole degeneraatiota). Ts. osoita, että Blochin tilat ovat tiettyä muotoa. (2 p.)

5. Hilbertin avaruuden kanta muodostuu ortonomaaleista tiloista  $|\uparrow\rangle$  ja  $|\downarrow\rangle$  ja systeemin Hamiltonin operaattori on (voit olettaa  $\Omega$ :n reaaliseksi)

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

a) Mitkä ovat mahdolliset tulokset energian mittauksesta? (2 p.)

b) Jos systeemi on tilassa  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle]$ , millä todennäköisyydellä eri energian mittaustulokset esiintyvät? (4p.)

*Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.*