

MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ELEC2), syksy 2015
MS-A0106 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ENG2), syksy 2015

2. välikoe 10.12.2015 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Laske integraali

$$\int_0^9 e^{\sqrt{x}} dx$$

sijoittamalla aluksi $x = t^2$.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = xy^2$ alkuehdolla $y(0) = 1$.

3. Määritä differentiaaliyhtälölle

$$y'' + 6y' + 8y = 80 \cos(2x)$$

sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. Millä muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla potenssisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{9^k} x^{2k}$$

suppenee? Tutki myös mahdolliset suppenemisvälin päätepisteet erikseen.

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Yhden välikokeen voi uusia tammikuun tentin yhteydessä, jolloin parempi tulos jää voimaan. Välikoe- ja tenttitehtävät ovat samalla paperilla, joista voi tehtävät nähtyään valita, tekeekö välikokeen vai tentin. Laskaripisteet eivät ole voimassa tentissä. **Myös välikokeen uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

$$\begin{aligned} \underline{1.} \quad \int_0^9 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_0^3 e^t \cdot 2t dt = 2 \int_0^3 t e^t dt \\ &= 2 \left[t e^t - \int_0^3 1 \cdot e^t dt \right] = 6e^3 - 2 \int_0^3 e^t dt = \underline{\underline{4e^3 + 2}} \end{aligned}$$

$$x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$$

$$dx = 2t dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 9 \Rightarrow t = 3$$

$$\underline{2.} \quad y' = xy^2, \quad y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = x dx \Rightarrow \int_1^y \frac{dx}{x^2} = \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow y = y(x) = \frac{2}{2-x^2}, \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$\underline{3.} \quad y'' + 6y' + 8y = 80 \cos(2x)$$

$$\text{H4: m K4: } \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases}$$

$$\text{EH4 yonite } y_0(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x), \quad y_0'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$$

$$y_0''(x) = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$$

$$\text{S1J. } \Rightarrow -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 12A \sin(2x) + 12B \cos(2x) + 8A \cos(2x) + 8B \sin(2x) = 80 \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A + 12B = 80 \\ -12A + 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{yf. math. } y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x} + 2 \cos(2x) + 6 \sin(2x)$$

$$y'(x) = -4C_1 e^{-4x} - 2C_2 e^{-2x} - 4 \sin(2x) + 12 \cos(2x)$$

$$\begin{cases} 0 = y(0) = C_1 + C_2 + 2 \\ 0 = y'(0) = -4C_1 - 2C_2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 8 \\ C_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{y(x) = 8e^{-4x} - 10e^{-2x} + 2 \cos(2x) + 6 \sin(2x)}}$$

$$\underline{4.} \quad a_k = kx^{2k}/9^k \Rightarrow \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{x^{2k+2}}{x^{2k}} \cdot \frac{9^k}{9^{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) x^2/9 \rightarrow x^2/9, \quad k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \text{suppreme, kum } x^2/9 < 1 \Leftrightarrow |x| < 3; \text{ konjantum, kum } x^2/9 > 1 \Leftrightarrow |x| > 3$$

$$x = \pm 3 \Rightarrow a_k = k \neq 0 \Rightarrow \text{HAJ. TULOS: } \underline{\underline{\text{suppreme} \Leftrightarrow -3 < x < 3}}$$