

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI), syksy 2015

1. välikoe 18.11.2015 klo 16.30–18.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Määritä funktion $f(x) = x \cos(3x)$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.
Huom: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi, kun $x_0 = 0$.

2. Laske raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + \pi)}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1 - \sqrt{x}}.$$

3. Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
a) Osoita, että funktio f on aidosti kasvava.
b) Päätele käänteisfunktion arvo $f^{-1}(2)$ ja laske sitä käyttämällä käänteisfunktion derivaatta

$$(f^{-1})'(2).$$

Huom: Ei kannata yrittää muodostaa käänteisfunktion lauseketta.

4. a) Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

- b) Käyrä $y = x^3$ pyörii x -akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq 1$. Laske näin syntyvän pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala.

Käännä!

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä Maclaurin-polynomiapproksimaatioita:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

$$(1+x)^r \approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Muita kaavoja ilman selityksiä:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$