

Kirjoita selvästi jokaiseen vastauspaperiin:

- Kurssin koodi, päivämäärä, kokeen tyyppi (välikoe 1)
- Opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- Koulutusohjelma ja vuosikurssi
- Nimikirjoitus

Vastausohje: Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi (paitsi tehtävässä 1). Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä.

Sallitut apuvälineet: Laskin, Mellinin tilastolliset taulukot, ja a4-muistilappu (käsinkirjoitettu, tekstiä vain toisella puolella, oikeassa yläkulmassa opiskelijan nimi)

1. Ovatko seuraavat väittämät totta? Vastaa **1** = Totta, **x** = Vastausta ei tunneta annettujen tietojen pohjalta, tai **2** = Tarua. (1 p/kohta)
 - (a) Olkoot X_1 ja X_2 satunnaislukuja, joiden odotusarvot ovat $E[X_1] = \mu_1$ ja $E[X_2] = \mu_2$. Silloin satunnaisluvun $X_1 - X_2$ odotusarvo on $\mu_1 - \mu_2$.
 - (b) Olkoot X_1 ja X_2 satunnaislukuja, joiden varianssit ovat $\text{Var}(X_1) = \sigma_1^2$ ja $\text{Var}(X_2) = \sigma_2^2$. Silloin satunnaisluvun $X_1 + X_2$ varianssi on $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.
 - (c) Olkoon X ei-negatiivisia kokonaislukuarvoja saava satunnaisluku. Silloin X :n pistodennäköisyydet ja X :n odotusarvo voidaan ilmaista todennäköisyydet generoivan funktion $G_X(t) = E[t^X]$ avulla.
 - (d) Minkä tahansa diskreetin satunnaisvektorin $X = (X_1, \dots, X_n)$ reunapistetodennäköisyysfunktiot voidaan laskea sen yhteispistetodennäköisyysfunktion avulla.
 - (e) Kaikille riippumattomille tapahtumille A ja B , joille $\Pr(B) > 0$, on ehdollinen todennäköisyys $\Pr(A|B)$ yhtäsuuri kuin todennäköisyyksien tulo $\Pr(A)\Pr(B)$.
 - (f) Jos X_1, X_2, \dots ovat riippumattomia satunnaislukuja, jotka noudattavat samaa jakaumaa, jonka odotusarvo on μ , niin todennäköisyydellä 1 keskiarvot $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ lähestyvät odotusarvoa μ kun n lähestyy ääretöntä.

Vihje: Ole erityisen tarkka ja huolellinen.

2. Erään kaupungin asukkaista 42% kannattaa republikaaneja ja loput kannattavat demokraatteja. Pidetyissä vaaleissa kävi äänestämässä republikaanien kannattajista 80% ja demokraattien kannattajista 55%.
 - (a) Valitaan umpimähkään yksi kaupungin asukas. Määrää todennäköisyys tapahtumalle ”valittu asukas kävi äänestämässä”. (3 p)
 - (b) Umpimähkään valittua asukasta haastatellaan, ja osoittautuu, että hän oli käynyt äänestämässä. Tämä tieto huomioiden, mikä on todennäköisyys tapahtumalle ”valittu asukas on republikaanien kannattaja”. (3 p)

3. Olkoon X jatkuva satunnaisluku, jolla on tiheysfunktio

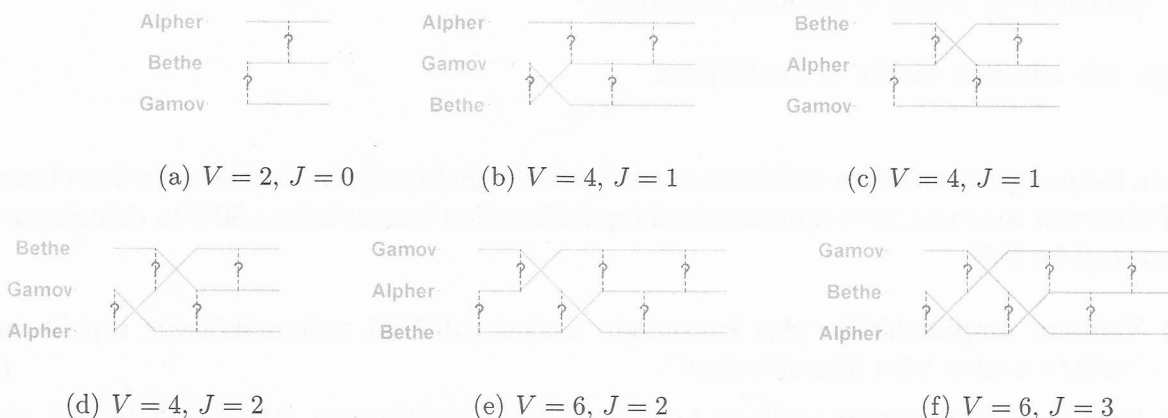
$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{kun } x > 1 \\ 0 & \text{kun } x \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Laske X :n kertymäfunktion arvot $F(x) = \Pr(X \leq x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (2 p)
 (b) Määrä todennäköisyys $\Pr(2 < X < 4)$. (2 p)
 (c) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo $E[X]$. (2 p)

4. BubbleSort on eräs tunnettu järjestysalgoritmi: sen avulla tietokone tuottaa järjestetyn version syötteenä annetusta mielivaltaisesta järjestyksessä olevasta listasta. Tähän kuuluva tietokoneen prosessoriaika riippuu algoritmin suorituksessa tarvittavien vertailuoperaatioiden lukumäärästä V ja listan alkioiden pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärästä J . Luvut V ja J puolestaan riippuvat syötteestä. Tässä tehtävässä tarkastellaan BubbleSort-algoritmia satunnaisessa järjestyksessä annetulla syötteellä (*Huom. Tehtävän ratkaisemiseksi ei ole välttämätöntä ymmärtää itse algoritmia!*).

Tarkastellaan tilannetta, jossa BubbleSort-algoritmillä pyritään aakkosjärjestämään kolme sukunimeä: "Alpher", "Bethe" ja "Gamow". Oletetaan nimilistan olevan alunperin täysin umpimähkäisessä järjestyksessä — siten, että kaikkia kuutta kolmen sukunimen mahdollista järjestystä voidaan pitää yhtä todennäköisinä syöteinä. Kuva 1 esittää kaikkia näitä mahdollisia syötteitä vastaavat BubbleSort-algoritmin vaiheittaiset etenemiset, ja kertoo kussakin tapauksessa tarvittun vertailuoperaatioiden lukumäärän V sekä pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärän J . Koska syöte on satunnainen, ovat luvut V ja J satunnaismuuttujia.

- (a) Laske satunnaismuuttujien V ja J odotusarvot. (3 p)
 (b) Laske satunnaismuuttujien V ja J kovarianssi. Päättele, ovatko vertailuoperaatioiden lukumäärä ja pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärä positiivisesti korreloituneet, negatiivisesti korreloituneet, vai lineaarisesti korreloimattomat. (3 p)



Kuva 1: (BubbleSort) Mahdolliset järjestykset kolmen sukunimen syötteelle ja niitä vastaavat vertailuoperaatioiden lukumäärät V ja pareittaisten järjestyksenvaihtojen lukumäärät J .