Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Lehtelä

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

1. välikoe 28.1.2016 klo 17–19.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Esitä seuraavien käsitteiden määritelmät metrisessä avaruudessa (X, d):
   a) avoin kuula $B(x, r)$;
   b) avoin joukko $U \subset X$;
   c) suljettu joukko $F \subset X$;
   d) joukon A sisäpiste;
   e) joukon $A \subset X$ reuna;
   f) joukkojen $A, B \subset X$ välinen etäisyys.

2. Verrataan avaruuden $\mathbf{R}^n$ normia
$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$
   euklidiseen normiin $\|x\|_2$.
   a) Osoita, että $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.
   Vihje: Sovella avaruuden $\mathbf{R}^n$ sisätuloon liittyvää Schwarzin epäyhtälöä vektoreihin $a = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ ja $b = (1, 1, \ldots, 1)$.
   b) Anna konkreettinen esimerkki tapauksessa $n = 2$ vektorista $\overline{0} \neq x \in \mathbf{R}^2$, jolle a-kohdan epäyhtälössä onkin voimassa yhtäsuuruus.
   (Tästä seuraa, että $\sqrt{2}$ on paras mahdollinen vakio a-kohdassa, kun $n = 2$)

3. Osoita, että kaavalla
$$d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$$
   määritelty funktio on metriikka joukossa $\mathbf{R}$.
   Vihje: Tutkittavia ominaisuuksia on kolme. Logaritmifunktion perusominaisuuksia voi käyttää ilman perusteluja.

4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\emptyset \neq A \subset X$. Osoita, että joukkojen läpimitoille on voimassa $d(A) = d(\overline{A})$.
   Vihje: Todista erikseen epäyhtälöt $\leq$ ja $\geq$. Epäyhtälön $\geq$ todistamiseksi tee vastaoletus ja johda ristiriita.