



Aalto-yliopisto

**Diskreetin matematiikan perusteet (IV / 15–16)****Välikoe / Loppukoe, ti 5.4.2016 klo 13:00–16:00**

Ei laskimia, ei taulukoita. Tehtävät ovat tasa-arvoisia.

**Tehtävä 1:**

a) Todista induktiolla, että  $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$  pätee kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ ).

b) Olkoon  $A = \{a, b, c, d, e\}$ . Määritellään ekvivalenssirelaatio  $\sim$  potenssijoukossa  $\mathcal{P}(A)$  (joukon  $A$  kaikkien osajoukkojen joukko) asettamalla  $X \sim Y$  jos ja vain jos  $|X| = |Y|$ . Montako ekvivalenssiluokkaa tällä relaatiolla on? Perustele lyhyesti.

**Tehtävä 2:**

a) Monelleko funktiolle  $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  pätee  $|f^{-1}(\{3\})| = 5$ ?

b) Monessako 10-numeroisessa kymmenjärjestelmän luvussa on täsmälleen neljä kakkosta eikä yhtään nollaa?

c) Moniko seitsemän pituinen bittijono alkaa ykkösellä tai loppuu ykkösellä tai sisältää täsmälleen neljä ykköstä?

Anna vastauksesi muodossa, josta lopullinen numeroarvo voitaisiin laskea laskimella, esim.

$$123! \cdot \binom{456}{789}.$$

**Käännä!**



**A**

Aalto-yliopisto

**Diskreetin matematiikan perusteet (IV / 15-16)****Tentti, ti 5.4.2016 klo 13:00-16:00****Tehtävä 3:**

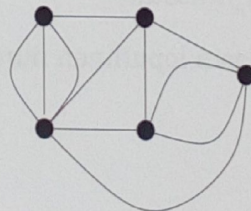
- Määritä Eukleideen algoritmilla  $\text{sy}(33, 70)$ .
- Määritä a-kohtaa hyödyntäen alkion 33 käänteisalkio joukossa  $\mathbb{Z}_{70}$ . Perustele, miksi löytämäsi alkio on etsitty käänteisalkio.

**Tehtävä 4:** Suora tanko on jaettu  $n$ :ään yhtä pitkään osaan piirtämällä tankoon  $n - 1$  viiltoa. (Oletetaan, että tangon poikkileikkaus on kiekko ja että viillot ovat ympyröitä.) Tankoa voidaan liikutella vapasti kolmiulotteisessa avaruudessa.

- Mitkä permutaatioryhmän  $S_n$  alkiot muodostavat tangon symmetriaryhmän? Tarkastele erikseen tapaukset  $n$  parillinen ja  $n$  pariton. Vihje: kokeile ensin tapauksilla  $n = 4$  ja  $n = 5$ .
- Monellako olennaisesti eri tavalla tangon osat voidaan värittää  $q$ :lla värillä?

**Tehtävä 5:** Tee **vaihtoehtoisesti** joko tehtävä a) tai b).

- Kerro mitä Eulerin syklillä tarkoitetaan. Esitä alla olevan verkon avulla, milloin ja miten Eulerin sykli yleisesti löydetään.



- Osoita tarkasti, että alla olevan verkon kromaattinen luku on neljä.

