MS-C1080 EXAM
ALGEBRAN PERUSRAKENTEET
INTRODUCTION TO ABSTRACT ALGEBRA
10.05.2016 (3h)

Camilla Hollanti, Marc Härkönen and Anton Mallasto

In all the assignments, a ring is assumed to have (by definition) an identity element: $1_R \in R$.
You may answer in either Finnish or English.
No calculators or tables are allowed.

1. Define/explain the following concepts:
   a) (2p) Lagrange's Theorem for groups.
   b) (2p) Group homomorphism.
   c) (3p) Field and characteristic.

2. a) (1p) If G is a non-abelian group, is the map $x \mapsto x^{-1}$ a homomorphism? Prove your assertion.
   b) (2p) Let G be a group such that $x^2 = 1$ for all $x \in G$. Prove that G is abelian.
   c) (3p) Let R be a ring such that $x^2 = x$ for all $x \in R$. Prove that R is commutative.

3. Let $f\colon R \to R'$ be a ring homomorphism.
   a) (3p) Show that the image is a subring.
   b) (3p) Show that the kernel is an ideal.

4. (6p) Let G be a group and H a subgroup. Let N be a normal subgroup of G. Show that
$$H/(H \cap N) \simeq HN/N$$
   (Hint: $HN = \{h \cdot n \mid h \in H,\ n \in N\}$ is a subgroup of G, and $H \cap N$ is a normal subgroup of H.)
   [**Extra**] You can earn 2 bonus points by proving the previous hints.

5. Let G be a group. Let a be an element of G. Let
$$\mathbf{c}_a\colon G \to G$$
   be the map such that
$$\mathbf{c}_a(x) = axa^{-1}$$
   a) (3p) Show that $\mathbf{c}_a\colon G \to G$ is an automorphism of G (that is an isomorphism from G to itself)
   b) (4p) Show that the set of all such maps $\mathbf{c}_a$ with $a \in G$ is a subgroup of $\operatorname{Aut} G$ (the group consisting of all automorphisms of G, with composition of functions as the operation).

Turn around for Finnish!

Kaikissa tehtävissä renkaalla oletetaan olevan multiplikatiivinen identiteetti: $1_R \in R$.
Voit vastata suomeksi tai englanniksi.
Laskimet ja taulukot ovat kielletty.

1. Selitä/määrittele seuraavat käsitteet:
   a) (2p) Lagrangen lause ryhmille.
   b) (2p) Ryhmähomomorfismi.
   c) (3p) Kunta ja karakteristika.

2. a) (1p) Jos G on ryhmä, joka ei ole abelinen, onko kuvaus $x \mapsto x^{-1}$ homomorfismi? Todista väitteesi.
   b) (2p) Olkoon G ryhmä, jolle pätee $x^2 = 1$ kaikilla $x \in G$. Todista, että G on abelinen.
   c) (3p) Olkoon R rengas, jolle pätee $x^2 = x$ kaikilla $x \in R$. Todista, että R on kommutatiivinen.

3. Olkoon $f\colon R \to R'$ rengashomomorfismi.
   a) (3p) Osoita, että kuvajoukko on alirengas.
   b) (3p) Osoita, että ydin on ideaali.

4. (6p) Olkoon G ryhmä ja H aliryhmä. Olkoon N ryhmän G normaali aliryhmä. Osoita, että

$$H/(H \cap N) \simeq HN/N$$

   (Vinkki: $HN = \{h \cdot n \mid h \in H,\ n \in N\}$ on ryhmän G aliryhmä, ja $H \cap N$ on ryhmän H normaali aliryhmä.)

   [**Extra**] Voi saata 2 lisäpistettä todistamalla vinkin.

5. Olkoon G ryhmä. Olkoon a jokin ryhmän G alkio. Olkoon

$$\mathbf{c}_a\colon G \to G$$

   sellainen kuvaus, jossa

$$\mathbf{c}_a(x) = axa^{-1}$$

   a) (3p) Osoita, että $\mathbf{c}_a\colon G \to G$ on ryhmän G automorfismi (eli isomorfismi ryhmästä G itselleen).
   b) (4p) Osoita, että kuvausten $\mathbf{c}_a$ joukko, jossa $a \in G$, on ryhmän $\operatorname{Aut} G$ aliryhmä. ($\operatorname{Aut} G$ on ryhmä, joka koostuu kaikista ryhmän G automorfismeista, ja jonka operaationa toimii funktioiden kompositio).

Turn around for English!