Aalto-yliopisto

MS-A0303

Tentti 13.6.2016 klo 12.30-15.30

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Kaavakokoelma koepaperin kääntöpuolella.

Tehtävä 1: Tarkastellaan tason vektorikenttää $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$.

a) Onko vektorikenttä lähteetön? Entä pyörteetön? (2 p.)

b) Onko vektorikenttä konservatiivinen? Jos on, etsi sen skalaaripotentiaali. (2 p.)

c) Mikä on kentän viivaintegraali pisteitä $(1, 0)$ ja $(1, 2)$ yhdistävän, origon kautta kulkevan ympyränkaaren yli? (2 p.)

Tehtävä 2: Laske funktion $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2z^2}$ viivaintegraali yli pintojen $x^2 + z^2 = 1$ ja $y = x^2$ leikkauskäyrän. (6 p.)

Tehtävä 3: a) Laske tason vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = \nabla(\sin x \cos y)$ viivaintegraali yli ellipsin $4x^2 + 9y^2 = 36$ reunakäyrän. (3 p.)

b) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$ vuo ulos tetraedristä, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ja $(0, 0, 3)$. (3 p.)

Tehtävä 4: Osoita Stokesin lauseen avulla, että

$$\oint_C (y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{r} = \sqrt{3}\pi a^2,$$

kun C on pintojen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja $x + y + z = 0$ leikkauskäyrä sopivasti suunnistettuna. (6 p.)

Tehtävä 5: Selitä lyhyesti kohtien a) - f) käsitteet ja anna jokaisesta esimerkki:

a) Divergenssi ja roottori

b) Vektorikentän kenttäviiva

c) Suunnistuva pinta

d) Vuointegraali

e) Gaussin lause

f) Ortogonaalinen käyräviivainen koordinaatisto

(6 p.)

Kaavakokoelma:

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\
\nabla\cdot(f\mathbf{F}) &= (\nabla f)\cdot\mathbf{F} + f(\nabla\cdot\mathbf{F}) \\
\nabla\times(f\mathbf{F}) &= (\nabla f)\times\mathbf{F} + f(\nabla\times\mathbf{F}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) \\
\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F}) - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}
\end{aligned}
$$

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_{\partial D} (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\mathbf{N}\,dS$$

$$\iiint_D f(\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV + \iiint_D \nabla f\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} f\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\mathbf{e}_w$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\mathbf{e}_u & h_v\mathbf{e}_v & h_w\mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

$$\int_c f\;ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right|\,dt.$$

area $= \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$

$$\int_c \mathbf{F}\cdot\,d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt$$

$$\iint_S f\;dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{n}(u,v)|\,du\;dv$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\,d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\;dS$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(r,θ,z): $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $z = z$

(r,φ,θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$