Aalto University
School of Science

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka
Tentti 24.05.2016

1. Vastaa lyhyesti, mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (1 p./kohta)
   a) Mitä tarkoitetaan degeneraatiolla?
   b) Mitä kvanttimekaniikassa tarkoitetaan harmonisella oskillaattorilla?
   c) Mitä tarkoitetaan superpositiotilalla?
   d) Mitä tarkoitetaan tiheysmatriisin yhteydessä puhtaalla tilalla?
   e) Mikä on Blochin aaltofunktio?
   f) Osoita ei-degeneroidussa tapauksessa, että jos kaksi hermiittistä operaattoria $\hat{A}$ ja $\hat{H}$ kommutoivat keskenään, niin niillä on yhteiset (ei-triviaalit) ominaisfunktiot.

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \leq x \leq L$, muulloin $V = \infty$.

   a) Osoita, että hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ ortonormeeratut ominaisfunktiot ovat

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{1}$$

   kun $0 \leq x \leq L$ ja nolla muulloin. Mitkä ovat mahdollisia mittaustuloksia energianmittauksesta? (2 p.)

   b) Oletetaan, että hiukkasen aaltofunktio on

$$\Psi(x, 0) = C\left[2\phi_1(x) - i\phi_3(x)/2\right]. \tag{2}$$

   Määritä kerroin C (1 p.)

   c) Käyttäen kohdan b) aaltofunktiota, mikä on hiukkasen paikan odotusarvo $\langle \hat{x} \rangle$? (Vihje: Aaltofunktion/ominaistilojen symmetrian käyttäminen pisteen $x = L/2$ ympärillä auttaa laskemissa.) (3 p.)

KÄÄNNÄ SIVUA

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa potentiaali on siis $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right), \tag{3}$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

a) Käyttäen $\hat{x}$:n ja $\hat{p}$:n peruskommutaatiorelaatiota johda kommutaatiorelaatio $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. (1p.)

b) Lausu harmonisen oskillaattorin Hamiltonin operaattori numero-operaattorin avulla. Mitkä ovat harmonisen oskillaattorin ominaistilojen energiat? (Perustelut) (3p.)

d) Mikä on harmonisen oskillaattorin perustilan aaltofunktio $\phi_0(x)$? Perustelut. (2p.)

4. a) Johda operaattorin $\hat{A}$ odotusarvon aikakehitykselle lauseke

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle, \tag{4}$$

missä $\hat{H}$ on Hamiltonin operaattori. (4 p.)

b) Johda liikeyhtälö liikemäärän odotusarvolle vapaassa avaruudessa missä potentiaali häviää. (Voit tarvittaessa olettaa a-kohdan tuloksen tunnetuksi.) (2 p.)

5. Hilbertin avaruuden kanta muodostuu ortonomaaleista tiloista $|\uparrow\rangle$ ja $|\downarrow\rangle$ ja systeemin Hamiltonin operaattori on (voit olettaa Ω:n reaaliseksi)

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

a) Mitkä ovat mahdolliset tulokset energian mittauksesta? (2 p.)

b) Jos systeemi on tilassa $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle]$, millä todennäkäisyydellä eri energian mittaustulokset esiintyvät? (4p.)

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.