Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Lindfors
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

2. välikoe 16.2.2015 klo 9–12.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin. **Ratkaisuissa saa käyttää kääntöpuolen tuloksia ilman käsin laskettuja välivaiheita.**

1. Perustele seuraava tulos: Olkoon $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio. Oletetaan, että $g(x_0, y_0) = 0$ ja että yhtälö $g(x, y) = 0$ esittää tasokäyrää, jolla on säännöllinen parametrisointi. Tällöin vektori $\nabla g(x_0, y_0)$ on kohtisuorassa käyrälle pisteeseen (x_0, y_0) asetettua tangenttia vastaan.

2. Olkoon $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy$.
   a) Kääntöpuolella on laskettu erään matriisin ominaisarvot. Mitä niiden perusteella voidaan sanoa yhtälön $f(x, y, z) = 1$ esittämästä pinnasta?
   b) Määritä funktion f kaikki kriittiset pisteet (= gradientin nollakohdat) ja selvitä niiden tyypit.
   Vihje: Jos $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, niin $(2A)\mathbf{v} = (2\lambda)\mathbf{v}$.

3. Suorakulmaisen särmiön (= laatikko) yksi kärki on origossa $(0, 0, 0)$ ja siitä lähtevät kolme särmää sijaitsevat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Lisäksi origosta lähtevän avaruuslävistäjän toinen päätepiste sijaitsee tasolla $4x + 2y + z = 12$ alueessa $x, y, z > 0$. Määritä särmiön suurin mahdollinen tilavuus xyz.

4. a) Laske tasojoukon $D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$ pinta-ala A ja osoita, että sen keskiön x-koordinaatti
   $$\overline{x} = \frac{1}{A} \iint_D x\, dA$$
   on äärellinen. Pinta-ala ja keskiö tulkitaan (tietysti) epäoleellisen tasointegraalin avulla.
   b) Laske kääntöpuolen "propellin" yhden lavan pinta-ala. Sen yhtälö on muotoa $r \leq \sin(3t)$, kun $0 \leq t \leq \pi/3$.

Käännä!

Tehtävä 2

> $with(linalg) : A := matrix(3, 3, [3, 1, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 3])$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

> $eigenvals(A)$ # $eigenvals = ominaisarvot$

$$2, 3, 4 \quad (1.2)$$

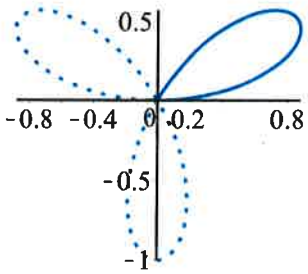
Tehtävä 4

> $with(plots) :$

> $A := plot\left(\sin(3 \cdot \text{phi}), \text{phi} = 0 .. \frac{\text{Pi}}{3}, coords = \text{polar}, color = blue\right) :$

> $B := plot\left(\sin(3 \cdot \text{phi}), \text{phi} = \frac{\text{Pi}}{3} .. \text{Pi}, coords = \text{polar}, color = blue, linestyle = dot\right) :$

> $display(\{A, B\}, scaling = constrained)$



> $\cos(a)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot a)),\ \sin(a)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot a))$

$$\cos(a)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\,a),\ \sin(a)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,a) \quad (2.1)$$

> $ang := \left[\text{alpha}, seq\left(\frac{k \cdot \text{Pi}}{3}, k = 0 .. 6\right)\right] : sinit := map(\sin, ang) : kosinit := map(\cos, ang) :$

> $array([ang, sinit, kosinit])$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{3}\pi & \frac{2}{3}\pi & \pi & \frac{4}{3}\pi & \frac{5}{3}\pi & 2\pi \\ \sin(\alpha) & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \cos(\alpha) & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$